Diplom-Prüfung Physik
Nebenfach Mathematik

Funktionentheorie
Gewöhnliche DGL's und dynamische Systeme

Martin-I. Trappe *

(Dated: 30. September 2005)

Quellen:

E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer (2000)

Fischer, Funktionentheorie

Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer (2002)

Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen

*cherubim_mit@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

- Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel: $\sqrt[n]{a_1 ... a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}$, für $a_i \geq 0$.
- **Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung:** $| \langle z, w \rangle | \leq |z||w|$
- **Definition:** Einen Vektorraum V nennt man eine Algebra, wenn mit $a, b \in V$ auch ein Produkt ab definiert ist, das in V lebt sowie Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllt. Vektorräume, die Körper sind, sind also auch Algebren.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \cosh' x &= \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \sinh' x &= \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

- Norm:

(N1)	Definitheit	$\|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(N2)	Homogenität	$\|\lambda\, x\| = \|\lambda\|\, \|x\|$
(N3)	Dreiecksungleichung	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

l^r-Norm: $\|x\|_r = (\sum_{k=1}^p |x_k|^r)^{\frac{1}{r}}$, Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = max\{|x_1|, |x_2|, ..\}$

- Metrik: Sei M eine Menge. Eine Abbildung $d(x, y) : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf M, wenn

(M1)	Definitheit	$d(x, y) \geq 0, \qquad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
(M2)	Symmetrie	$d(x, y) = d(y, x)$
(M3)	Dreiecksungleichung	$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- Skalarprodukt: Positiv definite hermitesche Sesquilinearform $V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$.

(S1)	Definitheit	$\langle x, x \rangle \geq 0, \qquad \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
(S2)	Hermitizität	$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
(S3)	Sesquilinearität	(komplexe Konjugation in der 2. Variable)

- **Satz:** Für alle Normen auf $\mathbb{R}^p$ $\exists\, \alpha, \beta > 0 \,:\, \alpha|x| \leq \|x\| \leq \beta|x|$
- **Approximationssatz von Weierstraß:** Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt, stetig, so existiert für alle $\epsilon > 0$ ein Polynom $p_\epsilon(t)$ mit $\sup_{t \in I} |f(t) - p_\epsilon(t)| < \epsilon$.
- Eine Abbildung $\varphi : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ ist ein C^r-Diffeomorphismus, wenn φ, φ^{-1} C^r-glatt sind.
- Eine Abbildung $\psi : M \longrightarrow N$, $M, N \subset \mathbb{R}^n$, ist ein Homöomorphismus, wenn ψ, ψ^{-1} stetig sind.
- Eine topologische Abbildung heißt auch Homöomorphismus.
- **Definition:** Ein Integritätsbereich ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring (etwa $\mathbb{Z}$).
- Eine Matrix $B = -B^T$ heißt schiefsymmetrisch.
- Der Abstand zwischen Punkt und Menge ist $dist(x, A) = inf\{|x - a| \mid a \in A\}$.
- Der Abstand zwischen zwei Mengen ist $dist(A, B) = inf\{|a - b| \mid a \in A, b \in B\}$.

- **Definition:** Ein metrischer Raum ist eine mit einer Metrik versehene Menge.
- Wurzelkriterium: Eine Reihe ist konvergent, falls $\underset{n\to\infty}{lim} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$.
- Quotientenkriterium: Eine Reihe ist konvergent, falls $\underset{n\to\infty}{lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$.
- **Mittelwertsatz der Differentialrechnung:** Ist f auf $[a, b]$ stetig und wenigstens in (a, b) differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a, b)$, so daß $f'(\xi) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$
- **Zwischenwertsatz von Bolzano:** Eine stetige Funktion auf $[a, b]$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
- **Definition:** A ist kompakt $:\Longleftrightarrow \forall$ offenen Überdeckungen von A, $A \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, U_λ offen, $\exists$ endliche Teilüberdeckung $A \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$ mit $\Lambda_0 \subset \Lambda$.
- Ist A kompakt und die stetige Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ auf A beschränkt, so nimmmt sie Minimum und Maximum an.
- Die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist wieder stetig.
- Eine Funktion f ist genau dann stetig auf D, wenn das Urbild *jeder* offenen Menge offen in D ist.
- **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:** Für zwei lineare Operatoren A, B und $\epsilon > 0$ gilt: $e^{\epsilon A+\epsilon B} = e^{\epsilon A} e^{epsilon B} e^{\epsilon^2 X}$, wobei X Kommutatoren von A und B enthält.
- Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls sie Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Treppenfunktionen ist.

2 Funktionentheorie

- Unterschiede zur reellen Analysis:
  - Identitätssatz
  - Analytische Funktionen sind C^∞-Funktionen
  - Jede analytische Funktion ist lokal in eine Potenzreihe entwickelbar
  - Die Differenzierbarkeit ist in der reellen Analysis nicht stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz.

2.1 Komplexe Zahlen

- Über die Definition von Addition und Multiplikation weist man die Körperaxiome für $\mathbb{C}$ nach.
- $\mathbb{C}$ enthält nach Konstruktion (über Tupel (.,.)) einen zu $\mathbb{R}$ *isomorphen* Unterkörper (es wird genauso gerechnet wie in $\mathbb{R}$).

$$i := (0,1)$$

- $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet, d.h. $\nexists$ ausgezeichnete Teilmenge wie die positiven Zahlen in $\mathbb{R}$.
-

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} \qquad |z+w| \le |z| + |w| \qquad |z-w| \ge ||z| - |w|| \qquad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

- Mit der Polardarstellung der Ebene ist die Abbildung

$$\mathbb{R}_+^\bullet \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet, \qquad z = (r,\varphi) \longmapsto r(cos\varphi + i\, sin\varphi) \tag{1}$$

surjektiv. φ heißt Argument von z.
- Dagegen ist

$$\mathbb{R}_+^\bullet \times]-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet$$

bijektiv. Hier ist $\varphi = Arg(z)$ der Hauptwert des Arguments.
- Für $z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ gilt $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\,\sin\varphi) \hookrightarrow$ geometrische Anschauung.
- **Satz:** $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!\ n$ verschiedene Einheitswurzeln $\zeta_n = \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\,\sin\frac{2\pi\nu}{n},\ 0 \le \nu < n$

$$a^n = -1, \hookrightarrow (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi) = -1 \Longleftrightarrow \varphi = \frac{(2\nu-1)\pi}{n}$$

- $W(n) = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ ist eine zyklische Gruppe, d.h. $\exists \zeta \in W(n)\ :\ W(n) = \{\zeta^\nu\,,\ 0 \le \nu < n\}$. ζ heißt primitive Einheitswurzel.
- Fermatsche Primzahlen sind von der Form $F_k = 2^{2^k} + 1,\ k \in \mathbb{N}$.
- Im Zusammenhang mit topologischen Begriffen muß $\mathbb{C}$ immer mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden.

2.2 Folgen und Reihen

- **Definition:** Bei einer Nullfolge geht der *Betrag* gegen Null.
- $exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ sind über die Reihen definiert $\Longrightarrow \forall z \in \mathbb{C}:\ e^{iz} := exp(iz) = \cos(z) + i\,\sin(z)$
- $e^z = e^x(\cos(y) + i\,\sin(y))$ hat keine Nullstelle.

- Durch die Funktionalgleichung ist ein Gruppenhomomorphismus definiert. Dann gilt für eine Periode w:

$$exp(z+w) = exp(z) \Longleftrightarrow exp(w) = 1 \Longleftrightarrow w \in Kern(exp)$$

Wegen $e^z = e^x(\cos(y) + i\,\sin(y))$ erhält man also

$$Kern(exp) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, exp(z) = 1\} = 2\pi i\,\mathbb{Z}$$

Wegen

$$\sin(z) = \frac{exp(iz) - exp(-iz)}{2i} = 0 \Longleftrightarrow exp(2iz) = 0 \Longleftrightarrow z = k\,\pi$$

hat der komplexe Sinus (und Kosinus) nur die reellen Nullstellen.

- **Satz:** Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < Im(z) \leq \pi\}$ ist wegen der Periodizität $2\pi i\mathbb{Z}$ (exp hat keine anderen Perioden) injektiv. Exp hat wegen (1) den Wertevorrat $\mathbb{C}^\bullet$, ist somit surjektiv, also bijektiv: $S \xrightarrow{exp} \mathbb{C}^\bullet$

$$w \longmapsto z = e^w$$

Also: Der Hauptzweig des Logarithmus

$$Log : \mathbb{C}^\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2}$$

ist eindeutig bestimmt durch $exp(Log\,z) = z$ und $-\pi < Im(Log(z)) \leq \pi$.

- **Definition:** $w = Log\,z$ ist der Hauptwert des Logarithmus von z.
- Aus $exp(w) = z$ folgt $w = Log\,z + 2\pi i\,k \Longrightarrow Log\,z = w + 2\pi i\,k$, $k \in \mathbb{Z}$. Nur für $w \in S$ ist $k = 0$.
- Es gilt $Log\,z = log|z| + i\,Arg(z)$: Wegen (2) genügt es zu zeigen, daß $exp(log|z| + i\,Arg(z)) = z$, was aber klar ist.
- $a^b := exp(b\,Log(a))$ liefert Werte, die sich um $exp(2\pi ibk)$ unterscheiden. $b = \frac{1}{n} \hookrightarrow n$-te Wurzeln von a; $b \in \mathbb{Z} \hookrightarrow a^b$ ist eindeutig. Wichtig ist hier, daß a^b *nicht* über $a^b := exp(Log(a^b))$, sondern über $a^b := exp(b\,Log(a))$ definiert wird. Damit ergibt sich die Mehrdeutigkeit $a^b := exp(b\,Log(a) + 2\pi ik\,b)$ anstelle von $a^b := exp(Log(a^b) + 2\pi ik) = exp(b\,Log(a) + 2\pi ik)$.

2.3 Analytische Funktionen

- Die Abbildung $\begin{array}{l} S^1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto Arg(z) \end{array}$ ist unstetig bei $z = -1$, da der Hauptzweig des Arguments auf $]-\pi, \pi]$ definiert wurde. Also ist der Logarithmus unstetig.
- **Definition:** $a \in \mathbb{C}$ ist Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{C} :\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists z \neq a \in D \,:\, |z-a| < \epsilon$.
- **Definition:** $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist komplex ableitbar in $a \in D$, wenn $\lim\limits_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existiert.
- **Satz:** Sei $D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$ ein HP von D, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, sowie $l \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

  1. f ist in a komplex ableitbar mit Ableitung l
  2. Es existiert eine in a stetige Funktion $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$, $\quad \varphi(a) = l$

3. Definiert man $r(z)$ durch die Gleichung $f(z) = f(a) + l(z-a) + r(z)$, so gilt: $\lim\limits_{z\to a} \frac{r(z)}{z-a} = 0$.

- Wegen 1. $\Longleftrightarrow$ 2. gilt: f ist in a komplex ableitbar $\Longleftrightarrow$ f ist total ableitbar (im Sinne der reellen Analysis) und die Jacobi-Abbildung $A = J(f,a)$ ist eine komplexe Zahl l (die Ableitung $f'(a)$): $Az = lz$.
- **Satz:** Für eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent (siehe Aufschrieb):

1. A ist $\mathbb{C}$ -linear.
2. $A(i) = i\,A(1)$
3. $\exists l \in \mathbb{C}$ mit $Az = lz$.
4. Die zugeordnete reelle Matrix in der kanonischen Basis hat die Form $J(f,a) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

- $f(z) = u(z) + i\,v(z) \hookrightarrow J(f,a) = \begin{pmatrix} \partial_x u(a) & \partial_y u(a) \\ \partial_x v(a) & \partial_y v(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow$ CR-DGL's.

Damit gilt: f ist in a komplex ableitbar $\Longleftrightarrow$ f ist total ableitbar und es gelten die CR-DGL's.
- Wegen $J(f,a)z = lz$ gilt $J(f,a) = u_x(a) + i\,v_x(a)$, mit $l = \alpha + i\,\beta$.
- **Satz:** $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt lokal konstant in D, wenn es zu jedem Punkt aus D eine Umgebung gibt, in der f sogar konstant ist (z.B. offene Treppenfunktionen)

$\Longleftrightarrow$ f ist komplex differenzierbar, mit $f'(z) = 0$, $z \in D$ (f ist also insbesondere stetig)

$\Longrightarrow$ komplex differenzierbare reelle (oder rein imaginäre) Funktionen sind lokal konstant. (Hier erkennt man die starke Einschränkung der komplexen Differenzierbarkeit.)
- **Definition:** Ist eine Funktion auf einer *offenen* Menge komplex differenzierbar, so heißt sie dort analytisch.
- **Definition:** f heißt analytisch im Punkt a, wenn es eine offene Umgebung von a gibt, in der f analytisch ist. ($f(z) = z\bar{z}$ ist zwar in $a = 0$ komplex differenzierbar, aber nicht analytisch; Widersprichsbeweis über obigen Satz für lokal konstante Funktionen)
- **Definition:** $D \subset \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn jede lokal konstante Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konstant ist.
- **Satz über implizite Funktionen:** Sei $f :\, D \longrightarrow \mathbb{C}$, D offen, analytisch.

a) Gilt $f'(a) \neq 0$ für ein $a \in D$, so existiert sogar eine Umgebung von a, in der f injektiv ist.

b) Ist f injektiv und gilt $f'(z) \neq 0\,, \forall z \in D$, so ist f^{-1} analytisch und es gilt:

$$f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

- $Log(z)$ ist analytisch in $\mathbb{C}_-$, mit $Log'(z) = \frac{1}{z}$. (Über den Satz von den impliziten Funktionen: Man benötigt einen offenen Definitionsbereich von exp $\Longrightarrow$ $Bild(\exp) = \mathbb{C}_-$. Log ist auf der negativen reellen Achse nicht differenzierbar.)
- Potentialfunktionen $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung $\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\, u =$

0.

- $2\times$ stetig partiell differenzierbare Real- und Imaginärteile analytischer Funktionen sind immer Potentialfunktionen. Das folgt schon aus den CR-DGL's.
- **Satz:** Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck (allgemeiner ein Elementargebiet) und

$$u:\ D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ eine Potentialfunktion,} \tag{3}$$

dann existiert eine analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit Realteil u.

- Ist der Imaginärteil (Realteil) einer analytischen Funktion gegeben, dann sind auch die Ableitungen v_x, v_y (u_x, u_y) gegeben. Mit den CR-DGL's erhält man den Realteil (Imaginärteil) durch Integration bis auf eine Konstante.
- **Definition:** Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

  1. orientierungstreu, wenn $det(T) > 0$.
  2. winkeltreu, wenn $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $|Tx|\,|Tx|\,\langle x, y\rangle = |x|\,|y|\,\langle Tx, Ty\rangle$.

2. bedeutet, daß der Betrag von φ unter T erhalten bleibt (siehe Abb.1):

$$\begin{aligned} \langle \hat{z}, \hat{w}\rangle &:= \left\langle \frac{z}{|z|}, \frac{w}{|w|} \right\rangle = \frac{\langle z, w\rangle}{|z|\,|w|} = \frac{\langle Tz, Tw\rangle}{|Tz|\,|Tw|} \\ &= \left\langle \hat{z}_\parallel + \hat{z}_\perp, \hat{w}\right\rangle = \left\langle \hat{z}_\parallel, \hat{w}\right\rangle = \cos\varphi \end{aligned}$$

1. läßt sich an $T = \sigma$, $z \longmapsto \bar{z}$ verdeutlichen: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det T = -1$, in der Standardbasis.
$\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ die Orientierung von φ ändert sich (siehe Abb.2).

- **Definition:** Eine total ableitbare Abbildung

$$f : D \longrightarrow D', \qquad D, D' \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

heißt (im Kleinen) konform, wenn die Jacobi-Abbildung $J(f, a)$ in jedem Punkt $a \in D$ winkel- und orientierungstreu ist. f heißt im Großen konform, wenn f zusätzlich bijektiv ist.

- Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$ in sich ist genau dann eine Drehstreckung

$$\begin{pmatrix} r\alpha & -r\beta \\ r\beta & r\alpha \end{pmatrix}, \qquad r > 0,$$

wenn sie winkel- und orientierungstreu ist (siehe Aufschrieb). Also gilt der

- **Satz:** Eine Abbildung $f\ :\ D \longrightarrow D'$ ist genau dann (im Kleinen) konform, falls sie analytisch ist und ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet.
- Alle konformen Abbildungen sind also winkel-und orientierungstreu, Bsp. *exp*.
- Konformität bedeutet, daß der orientierte Winkel zwischen zwei Kurven im Bild D' derselbe ist wie im Urbild D:

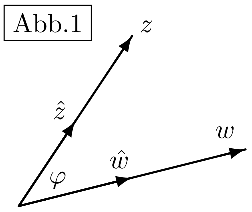
Zwei Kurven schneiden sich für den Parameterwert a. Winkel sind als Schnittwinkel zwischen Tangenten zweier Kurven im Schnittpunkt a definiert: $\angle(\alpha_1'(a), \alpha_2'(a))$ (Für die Werte der Kurven α_1, α_2 in a gilt natürlich $\alpha_1(a) = \alpha_2(a)$). Nun betrachtet man den Schnittwinkel der Bildkurven unter der konformen Abbildung f am Schnittpunkt (der wieder durch den Parameterwert a erklärt ist):

$$\angle((f \circ \alpha_1)'(a), (f \circ \alpha_2)'(a)) = \angle(f'(\alpha_1(a))\, \alpha_1'(a), f'(\alpha_2(a))\, \alpha_2'(a))$$

$\alpha_1'(a)$ und $\alpha_2'(a)$ werden also mit einer komplexen Zahl $f'(\alpha_1(a)) = f'(\alpha_2(a))$ multipliziert. Da f' immer ungleich Null ist, ist diese Operation eine Drehstreckung und ändert nichts an $\angle(\alpha_1'(a), \alpha_2'(a))$.

- $f(z) = z^n$ ist z.B. nicht konform, weil die Ableitung im Nullpunkt verschwindet. Exp ist eine im Großen konforme Abbildung des Streifens $-\pi < Im\, z < \pi$ auf $\mathbb{C}_-$.

Abb.1



Aus der Determinante $ad - bc$ erhält man folgende Anschauung:

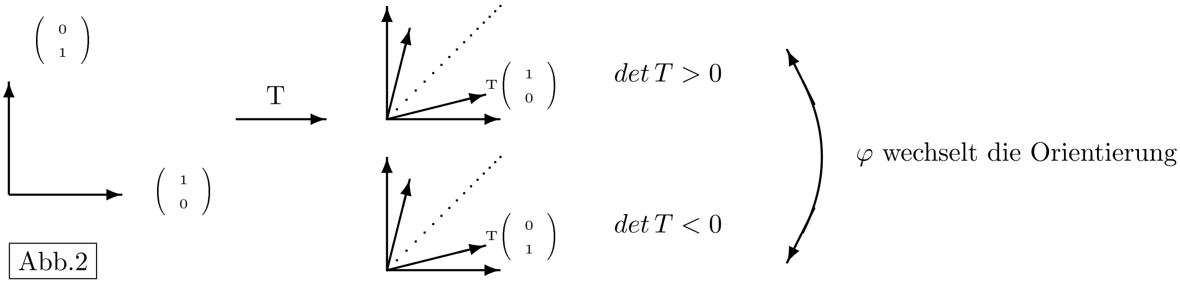


Abb.2

2.4 Komplexe Integration

- **Definition:** $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn $Re\, f$ und $Im\, f$ integrierbar sind:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b Re\, f(x) dx + i \int_a^b Im\, f(x)\, dx$$

- **Definition:** Eine Kurve ist eine stetige Abbildung $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- **Definition:** Eine Kurve heißt glatt, falls sie stetig differenzierbar ist.
- **Definition:** Eine glatte Kurve heißt regulär, falls ihre Ableitung in keinem Punkt verschwindet.
- **Definition:** Ist $\alpha : [a, b] \subset D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Kurve und $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann heißt

$$\int_\alpha f := \int_\alpha f(\zeta) d\zeta := \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt$$

das Kurvenintegral von f längs α. Für $\alpha = t$ erhält man das gewöhnliche Riemann-Integral.

- **Definition:** Die Bogenlänge einer glatten Kurve ist $l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$.
- $\int_\alpha$ ist $\mathbb{C}$ -linear in f. Es gilt $\left|\int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta\right| \leq C\, l(\alpha)$, wenn $|f(\zeta)| \leq C$.
- Transformationsinvarianz des Kurvenintegrals: Sei $\alpha : [\varphi(a), \varphi(b)] \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise glatt und φ :

$[a, b] \longrightarrow [\varphi(a), \varphi(b)]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\alpha\circ\varphi} f(\zeta)\, d\zeta$$

- Wenn $F' = f$, dann folgt aus der Definition des Kurvenintegrals sofort

$$\int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

Also: Besitzt eine stetige Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, eine Stammfunktion F, so gilt

$$\int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{4}$$

für jede ganz in D verlaufende geschlossene Kurve α.

- Zwar besitzt $f(z) = \frac{1}{z}$ die Stammfunktion $Log(z)$ auf $\mathbb{C}_-$, aber nicht auf $\mathbb{C}^\bullet$, weil

$$\int_\alpha z^{-1}\, dz = \int_0^{2\pi} (r\, e^{it})^{-1}\, ire^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0$$

mit der einfach durchlaufenen Kreislinie α.

2.5 Cauchysche Integralsätze

- **Definition:** Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt bogenweise zusammenhängend, falls zu je zwei Punkten $z, w \in D$ eine ganz in D verlaufende stückweise glatte Kurve $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, welche z mit w verbindet ($\alpha(a) = z$, $\alpha(b) = w$).
- **Satz:** Jede bogenweise zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist zusammenhängend, d.h. jede lokal konstante Funktion auf D ist konstant.
- **Widerspruchsbeweis:** Sei also f lokal konstant, aber nicht konstant. Für $f(z) \neq f(w)$ werden z, w durch Kurve eine $\alpha : [a, b] \longrightarrow D$ verbunden. $g(t) := f(\alpha(t))$ ist lokal konstant $\Longrightarrow g'(t) = 0 \Longrightarrow g$ ist konstant, da $[a, b]$ zusammenhängend ist.
- D ist zusammenhängend $\Longleftrightarrow [(D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 = \emptyset) \Longrightarrow D_1 = \emptyset \vee D_2 = \emptyset]$. (Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle.)
- **Definition:** Ein Gebiet ist eine bogenweise zusammenhängende *offene* Menge $D \subset \mathbb{C}$.

- **Definition:** Die reziproke Kurve zu $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\begin{aligned} \alpha^- : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \alpha(b + a - t) \end{aligned}$
- **Satz:** Für eine *stetige* Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \tag{5}$$

auf einem Gebiet D sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt eine Stammfunktion.
2. Das Integral über jede in D verlaufende geschlossene Kurve verschwindet.
3. Das Intregral von f über jede in D verlaufende Kurve hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

- **Beweis:**
  a) 1. $\Longrightarrow$ 2. Über die Definition des Kurvenintegrals, (siehe (4)).

  b) 2. $\Longrightarrow$ 3. zu zeigen: $\int_\alpha f = \int_\beta f$, mit $\alpha(a) = \beta(c)$ und $\alpha(b) = \beta(d)$.

  c) 3. $\Longrightarrow$ 1. zu zeigen: $F' = f$, wobei $F := \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta$ nach Voraussetzung nicht vom Weg zwischen z_1 und z_2 abhängt.

- **Definition:** Eine Menge M heißt konvex, wenn mit $z, w \in M$ auch die Verbindungsstrecke in M liegt.
- Die von den drei Punkten z_1, z_2, z_3 aufgespannte Dreiecksfläche

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} | z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3\,,\ t_i \geq 0\,,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

ist sogar die kleinste konvexe Menge die z_1, z_2, z_3 enthält.

- **Cauchyscher Integralsatz für Dreieckswege:** (Fundamentallemma der Funktionentheorie), (Goursat, Pringsheim)

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}\ \ D \subset \mathbb{C}$ offen, analytisch und z_1, z_2, z_3 Punkte aus D, so daß die von ihnen aufgespannte Dreieceksfläche ganz in D enthalten ist. Dann gilt

$$\oint_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

- **Beweis:** Konstruktion einer Folge von Dreiecksflächen $\Delta^{(n)}$ mit Dreieckswegen $\alpha^{(n)}$. Dabei soll gelten: $\alpha^{(0)} = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$, $\alpha^{(n+1)} \in \{\alpha_1^{(n)},\ \alpha_2^{(n)},\ \alpha_3^{(n)},\ \alpha_4^{(n)}\}$, so daß

$$\left| \oint_{\alpha^{(n)}} f \right| \leq 4 \left| \oint_{\alpha^{(n+1)}} f \right|$$

also

$$\left| \oint_{\alpha} f \right| \leq 4^n \left| \oint_{\alpha^{(n)}} f \right|$$

Nach dem *Intervallschachtelungsprinzip* existiert ein Punkt $z_0 \in \Delta^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. f ist in z_0 komplex ableitbar: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z) \Longrightarrow \oint_{\alpha^{(n)}} f(z)\, dz = \oint_{\alpha^{(n)}} r(z)\, dz$, da der affine Teil von $f(z)$ eine Stammfunktion besitzt. Nun zeigt man, daß die rechte Seite gegen Null konvergiert: Es gilt

$$\forall \epsilon > 0\, \exists\, U_\delta(z_0)\ :\ \forall z \in U_\delta(z_0)\ |r(z)| \leq \epsilon |z - z_0|$$

Außerdem existiert ein $N\ :\ \forall\, n \geq N\, \Delta^{(n)} \subset U_\delta(z_0)$. Benutze $|z - z_0| \leq l(\alpha^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(\alpha)$, für $z \in \Delta^{(n)}$.

- **Definition:** Ein Sterngebiet ist eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft: $\exists\, z_* \in D$: $\forall\, z \in D\ \{z_* + t(z - z_*);\ t \in [0, 1]\} \subset D$.
- Da man je zwei Punkte über einen Sternmittelpunkt verbinden kann, ist ein Sterngebiet bogenweise zusammenhängend, also ein Gebiet.
- **Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete:**

Jede analytische Funktion f auf einem Sterngebiet D besitzt eine Stammfunktion in D. (6)

- **Beweis:** Ist z_* Sternmittelpunkt und $z_0 \in D$ beliebig, so existiert eine Umgebung

$U(z_0) \subset D\ :\ \forall\, z \in U(z_0)\ \Delta_{\langle z_*, z_0, z \rangle} \subset D$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Dreieckswege gilt also:

$$\int_{z_*}^{z_0} f = \int_{z_*}^{z} f + \int_{z}^{z_0} f$$

Dies gilt für je drei Punkte z_*, z_0, z, deren Δ ganz in D liegt. Das Integral über jede in D verlaufende Kurve hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

- Ein Sterngebiet ist ein Gebiet, eine analytische Funktion ist stetig. Nach Satz (5) gelten also für eine analytische Funktion auf einem Sterngebiet folgende äquivalente Aussagen:

  - f besitzt eine Stammfunktion
  - $\oint_\alpha f = 0$, für alle geschlossenen Kurven α
  - $\int_\alpha f$ hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab

- Damit ist klar: Jede in einem *beliebigen* Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion besitzt wenigstens lokal eine Stammfunktion, da Kreisscheiben Sterngebiete sind.
- Als Anwendung von (6) erhält man so eine neue Konstruktion des Hauptzweiges des Logarithmus:

$$L(z) := \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta \,,$$

da $\frac{1}{\zeta}$ analytisch in $\mathbb{C}_-$. L und Log haben die gleiche Ableitung und stimmen im Punkt $z = 1$ überein, also gilt $L = Log$.

- Für einen speziellen Integrationsweg ergibt sich die bekannte Darstellung

$$L(z) = \int_1^z \frac{1}{t} dt + i \int_0^\varphi dt = log|z| + i\, Arg(z) = Log(z)$$

- **Variante des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete:** Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine *stetige* Funktion in einem Sterngebiet D mit Sternmittelpunkt z_*. Wenn f in $D \setminus \{z_*\}$ komplex differenzierbar ist, so besitzt f schon eine Stammfunktion in D.
- **Beweis:**

$$\int_{\langle z_*, z_0, z\rangle} f = \int_{\langle z_*, w_0, w\rangle} f + \int_{\langle w_0, z_0, w\rangle} f + \int_{\langle z_0, z, w\rangle} f \overset{(5)}{=} \int_{\langle z_*, w_0, w\rangle} f \longrightarrow 0 \ (w \to z_*,\ w_0 \to z_*)$$

- **Definition:** Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt Elementargebiet, wenn jede auf D analytische Funktion eine Stammfunktion auf D besitzt.
- Jedes Sterngebiet ist also ein Elementargebiet.
- **Satz:** Ist die analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem Elementargebiet D immer ungleich Null, so existiert eine analytische Funktion mit der Eigenschaft $f(z) = exp(h(z))$. Man nennt h einen analytischen Zweig des Logarithmus von f.
- **Folgerung:** Damit existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine analytische Funktion

$$H : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } H^n = f \tag{7}$$

- **Satz:** Seien D, D' zwei Elementargebiete. Wenn $D \cap D'$ zusammenhängend und nicht leer ist, so ist $D \cup D'$ auch ein Elementargebiet.
- **Satz:** Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und

$$\varphi \,:\, D \longrightarrow D' \text{ im Großen konform,} \tag{8}$$

dann ist D' ebenfalls ein Elementargebiet.

2.6 Cauchysche Integralformeln

- **Hilfssatz:** Mit der Kurve $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ und $|a - z_0| < r$ gilt

$$\oint_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 2\pi i \tag{9}$$

- **Beweis:** man möchte die Situation auf den Fall $\oint_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$ zurückführen. Dazu zeigt man an einer Figur und mit dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete:

$$\oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \oint_{|\zeta - a|} \frac{d\zeta}{\zeta - a} \left(= \oint_{|z|} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \right)$$

- **Cauchysche Integralformel (Cauchy, 1831):** Für die analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, liege die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{U}_r(z_0)$ ganz in D.
Dann gilt mit $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$ für jeden Punkt $z \in U_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{10}$$

- Die Werte im Innern sind bestimmt durch die Werte auf dem Rand.
- **Beweis:** Über die stetige, außerhalb von z komplex differenzierbare Funktion g auf dem Sterngebiet $U_r(z_0) \subset \bar{U}_r(z_0)$ mit

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & , w \neq z \\ f'(z) & , w = z \end{cases}$$

erhält man für $\zeta \neq z$: $\oint \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$. Mit (9) folgt sofort die Behauptung.
- **Leibnizsche Regel:** Sei

$$f : [a, b] \times D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad D \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

stetig und für jedes feste $t \in [a, b]$ analytisch in D ist. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z} : [a, b] \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ sei ebenfalls stetig.
Dann ist die Funktion $g(z) := \int_a^b f(t, z)\, dt$ analytisch in D, mit $g'(z) := \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\, dt$.
- Mit (10) und der Leibnizschen Regel folgen über Induktion nach n die **Verallgemeinerten Cauchyschen Integralformeln:**
Jede analytische Funktion ist beliebig oft komplex ableitbar und jede Ableitung ist wieder analytisch. Es gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad , \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

- Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes von Goursat: **Satz von Morera (Morera, 1886):**
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Gilt für jede ganz in D enthaltene Dreiecksfläche Δ

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \,,$$

so ist f analytisch.
- **Beweis:** Zu zeigen ist, daß für alle $z_0 \in D$ eine Umgebung $U_\epsilon(z_0)$ existiert, in der f analytisch ist. Dazu zeigt man analog (5) 3. $\Longrightarrow$ 1., daß $F(z) := \int_{\sigma(z_0, z)} f(\zeta)\, d\zeta$ Stammfunktion von f ist, also $F' = f$. F ist in $U_\epsilon(z_0)$ ableitbar, also ist dort auch f analytisch.
- **Definition:** Ist eine Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch, so heißt sie ganz (z.B. exp, sin, Polynome).

- **Satz von Liouville (Liouville, 1847):** Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

($\Longleftrightarrow$ Eine nicht konstante ganze Funktion (z.B. cos) kann nicht beschränkt sein.)

- **Beweis:** Mit den Cauchyschen Integralformeln zeigt man $\forall\, z \in \mathbb{C}$, daß $|f'(z)| \leq \frac{C}{r}$, $\forall r > 0$ und $|f(z)| \leq C$. Aus $r \longrightarrow \infty$ folgt $f = const.$

- **Folgerung:** Es existiert keine im Großen (und nicht mal im kleinen) konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}$.

- **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle.

- **Beweis (über den Satz von Liouville):** $\forall \epsilon > 0$, mit $0 < \epsilon < 1$, $\exists p_\epsilon \geq 1 \,:\, \forall |z| \geq p_\epsilon$

$$(1-\epsilon)|a_n|\,|z|^n \leq |P(z)| \leq (1+\epsilon)|a_n|\,|z|^n$$

Für $|z| \longrightarrow \infty$ gilt also sicher $|P(z)| \longrightarrow \infty$. Hat P keine Nullstelle, so ist die ganze Funktion $\frac{1}{P}$ beschränkt, also konstant, im Widerspruch zur Annahme.

- **Folgerung:** Jedes Polynom $P(z)$ vom Grade $n \geq 1$ läßt sich als Produkt von n Linearfaktoren und einer Konstanten $C \in \mathbb{C}^\bullet$ schreiben: $P(z) = C(z-\alpha_1)...(z-\alpha_n)$.

- **Beweis:** Es existiert immer eine Nullstelle α_1. Man kann $P(z)$ immer umordnen zu $P(z) = b_0 + b_1(z-\alpha_1) + \ldots$. Wegen $P(\alpha_1) = 0 \Longrightarrow b_0 = 0$ folgt $P(z) = (z-\alpha_1)Q(z)$. Rest durch vollständige Induktion *nach* n, über die Existenz einer Nullstelle.

- **Weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:**

Widerspruchsbeweis: Sei $P(z) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{z\,P(z)} = \frac{z\,Q(z)+a_0}{z\,P(z)} = \frac{a_0}{z\,P(z)} + \frac{Q(z)}{P(z)}$. Dann gilt: $2\pi i = \int_\alpha \frac{a_0}{z\,P(z)}dz$, mit $\alpha(t) := Re^{it}$, also $|2\pi| \leq \int_\alpha \frac{|a_0|}{|z|\,|P(z)|}dz$. Mit $\frac{1}{2}|a_n|\,|z|^{n+1} \leq |z|\,|P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\,|z|^{n+1}$, für ein $p \leq |z|$, gilt:

$$2\pi \leq \int_\alpha \frac{|a_0|}{\frac{1}{2}|a_n|\,|z|^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \left| iRe^{it} \frac{2|a_0|}{|a_n|\,R^{n+1}} \right| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2|a_0|}{|a_n|\,R^n} dt$$

Wählt man R so groß, daß z.B. $\frac{2|a_0|}{|a_n|\,R^n} < 0.1$, dann folgt: $2\pi < 0.2\,\pi$, also hat P eine Nullstelle.

2.7 Gleichmäßige Approximation

- Eine gleichmäßig konvergente Folge von integrierbaren Funktionen konvergiert stets gegen eine integrierbare Funktion.

- Die Differenzierbarkeit ist in der reellen Analysis jedoch *nicht* stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz.

- Im Gegensatz dazu ist aber die Differenzierbarkeit im Komplexen (auf offenen Mengen) stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz, denn die Ableitung im Komplexen erhält man über die Cauchysche Integralformel durch einen Integrationsprozeß, welcher stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz ist.

- **Definition:** Eine Folge (f_n) konvergiert lokal gleichmäßig auf D, wenn $\forall\, a \in D$ eine Umgebung $U(a) \subset D$ existiert, so daß f auf $D \cap U(a)$ gleichmäßig konvergiert.

- Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel konvergiert eine lokal gleichmäßig konvergente Folge (f_n) auf jedem Kompaktum $K \subset D$ sogar gleichmäßig. Die lokal gleichmäßig konvergente Folge (f_n) heißt daher kompakt konvergent.

- Ist D offen, so gilt sogar die Umkehrung: Ist $(f_n)_{|_K}$ für alle Kompakta K gleichmäßig konvergent, so konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig auf D. Es gilt nämlich: $\forall a \in D\, \exists\, U_1(a) \subset D$, offen, also existiert auch $\forall a \in D$ eine kompakte *Kreischeibe* $K(a) \subset U_1(a)$, auf der (f_n) gleichmäßig konvergiert. Nun existiert wiederum ein $U_2(a) \subset K(a)$, offen, auf der (f_n) natürlich auch gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig.

- **Satz:** Ist $(f_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von stetigen Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt für jede Kurve $\alpha : [a,b] \longrightarrow D$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(\zeta)\, d\zeta = \int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta$$

- Für Reihen bedeutet das die Vertauschbarkeit von Summation und Integration.
- **Beweis:** $Bild(\alpha)$ ist kompakt. (f_n) konvergiert also gleichmäßig auf $Bild(\alpha) \Longrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\ |f(z) - f_n(z)| \le \epsilon, \forall z \in Bild(\alpha) \Longrightarrow \left|\int_\alpha f_n - \int_\alpha f\right| \le l(\alpha)\,\epsilon$
- **Satz (Weierstrass, 1841):** Ist $(f_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von analytischen Funktionen, welche lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion f analytisch und die Folge der Ableitungen (f_n') konvergiert lokal gleichmäßig gegen f'.
- **Beweis:** Über den Satz von Morera und dessen Umkehrung kann man komplexe Differenzierbarkeit durch ein Integralkriterium charakterisieren. Die Ableitungen f_n' sind über die Cauchyschen Integralformeln gegeben. Das komplexe Kurvenintegral ist aber stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz.
- **Definition:** Eine Reihe aus Funktionen $(f_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt normal konvergent, falls es zu jedem Punkt $a \in D$ eine Umgebung $U(a)$ und eine Folge (M_n) von Zahlen gibt, so daß für alle n gilt:

$$|f_n(z)| \le M_n\,,\ \forall\, z \in U(a) \cap D\,,\ \text{und}\ \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$$

- Wegen $U(a) \cap D$ muß D nicht offen sein.
- **Weierstraßscher Majorantentest:** Eine normal konvergente Reihe von Funktionen konvergiert absolut und lokal gleichmäßig.
- **Satz (Weierstrass, 1841):** Für eine normal konvergente Reihe von analytischen Funktionen auf einer offenen Menge ist auch die Grenzfunktion f analytisch und es gilt $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.
- **Beweis:** folgt sofort aus dem obigen Satz von Weierstrass.
- Die Reihe der Ableitungen konvergiert dann ebenfalls normal.
- **Riemannsche ζ-Funktion:** Die Reihe $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (mit eindeutigem $n^s := exp(s\,log(n))$, $n \in \mathbb{N}$) konvergiert normal in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C}|\ Re\, z > 1\}$. Riemannsche Vermutung: Alle nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ haben $Re = \frac{1}{2}$.

2.8 Potenzreihen

- Eine Potenzreihe konvergiert in $U_r(0)$ *normal*. Für $|z| > r$ divergiert sie.
- **Definition:** $r = sup\{\rho \ge 0 | (a_n \rho^n)\text{ist beschränkte Folge bzw. ist Nullfolge}\}$.
- Nach dem Satz von Weierstrass gilt: Eine Potenzreihe ist im Inneren der Konvergenzkreisscheibe $U_r(0)$ eine analytische Funktion, deren Ableitung sich durch gliedweise Differentiation ergibt.
- **Potenzreihenentwicklungssatz (Cauchy, 1831):**

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, D offen, analytisch. Die Kreisscheibe $U_R(a)$ möge ganz in D liegen. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad , \forall\, z \in U_R(a). \tag{11}$$

Die Koeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$, erhält man durch gliedweise Differentiation als auch über den Beweis.

- Insbesondere ist dann eine analytische Funktion lokal immer in eine Potenzreihe entwickelbar. Die Koeffizienten a_n sind eindeutig, also ist auch die Entwicklung eindeutig. Deshalb genügt es auch, die Entwicklung für ein beliebiges ρ, mit $0 < \rho < R$, in dem kleineren Kreis $|z-a| < \rho$ anzugeben:
- **Beweis:** es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad , \text{ für } |z-a| < \rho$$

und

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - a)^{n+1}} (z-a)^n$$

Durch Vertauschung von Summation und Integration erhält man die Koeffizienten a_n und damit die Entwicklung.

- Dies ist der Weierstrasssche Zugang zur Funktionentheorie: Analytische Funktionen sind genau diejenigen Funktionen, welche sich lokal in Potenzreihen entwicklen lassen.
- Durch folgenden Satz erhält man sieben Möglichkeiten, analytische Funktionen einzuführen:
- **Satz:** Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, D offen, sind folgende Aussagen äquivalent:

a) f ist analytisch.

b) f ist total differenzierbar im Sinne der reellen Analysis und es gelten die CR-DGL's.

c) f ist stetig und $\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f = 0$, für jeden ganz in D enthaltenen Dreiecksweg.

d) f besitzt lokal eine Stammfunktion.

e) f ist stetig und für jede Kreisscheibe $U_\rho(a)$, mit $\bar{U}_\rho(a) \subset D$, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad , \text{ für } |z-a| < \rho$$

f) f ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar.

g) f ist in jeder in D enthaltenen offenen Kreisscheibe durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar.

- **Beweis zu e):** Ist f analytisch, so gilt natürlich die Cauchysche Integralformel.

Falls $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\rho \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}}_{} d\zeta \qquad = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\oint_\rho \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta}_{\leq 2\pi\rho M_n}$$

(konvergiert normal (ζ fest)für $\{z \mid |z-a| < \rho\}$ (Potenzreihe))

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\oint_\rho \frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta}_{\text{analytisch in } z}$ konvergiert *auch* normal (beschränkt durch $2\pi\rho M_n$).

$\Longrightarrow$ Die Grenzfunktion ist analytisch $\Longrightarrow f(z)$ ist analytisch.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\, sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, aber f' ist nicht stetig.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\, exp(-\frac{1}{x^2}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ wird in keiner Umbegung von 0 durch ihre Taylorreihe dargestellt. $\hookrightarrow$ $f \in C^\infty(J)$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Darstellung von f durch eine Potenzreihe. Der Potenzreihenentwicklungssatz (11) hat also kein Analogon im Reellen.
- Nach (11) findet man den Bereich, in welchem f durch eine Potenzreihe um den Punkt a darstellbar ist, indem man eine maximale Kreisscheibe $\bar{U}_R(a) \subset D$ wählt. Natürlich kann der Konvergenzradius ρ der *Potenzreihe* größer als R sein, nur wird f in diesem Bereich nicht mehr durch diese Potenzreihe dargestellt (z.B. der Hauptzweig des Logarithmus).
- Dagegen gilt für die Entwicklung von $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}$, mit $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, um 0: $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$. Wegen (11) ist $\rho \geq 1$. Die *Potenzreihe* an sich konvergiert aber auch für $\rho > 1$ nicht mehr (geometrische Reihe). Also folgt $\rho = 1$.
- Ist $a_0 \neq 0$, so ist $P(z) = a_0 + a_1 z + ... \neq 0$, für $z \in U_r(0)$, also ist auch $\frac{1}{P(z)}$ für $|z| < r$ in eine Potenzreihe entwickelbar.
- Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ läßt sich durch

$$(z-a)^n = (z-b+b-a)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ \nu \end{pmatrix} (b-a)^{n-\nu}(z-b)^\nu$$

umordnen. Der Konvergenzradius der umgeordneten Reihe ist dann mindestens $\rho - |b-a| > 0$, für $b \in U_\rho(a)$.
- Für Potenzreihen der Form $P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ...$ existiert lokal um 0 eine *analytische* Umkehrfunktion.

2.9 Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen

- **Definition:** Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, so heißt eine Teilmenge $M \subset D$ diskret in D, falls in D kein Häufungspunkt von M enthalten ist ($M = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist diskret in $\mathbb{C}^\bullet$, aber nicht diskret in $\mathbb{C}$).
- **Hilfssatz:** Ist eine analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet D nicht die Nullfunktion, so ist die Nullstellenmenge $N(f)$ von f diskret in D.
- **Beweis (der Umkehrung):** Durch Widerspruch: Man zeigt, daß für einen Häufungspunkt $a \in D$ von $N(f)$ eine Umgebung $U_\epsilon(a)$ existiert, in der f identisch verschwindet, indem man f in eine Potenzreihe entwickelt und sukzessive zeigt, daß die Koeffizienten verschwinden (für den zweiten Koeffizienten betrachtet man die Entwicklung von $\frac{f(z)}{z-a}$). Damit ist $U := \{z \in D \,|\, z$ ist HP von $N(f)\}$ offen. Nun zeigt man, daß auch $V := \{z \in D \,|\, z$ ist kein HP von $N(f)\}$ offen ist: Angenommen, jede Umgebung eines beliebigen Punktes $z \in V$ enthielte einen Punkt, der HP von $N(f)$ ist, dann wäre z selbst HP von $N(f)$, also $z \notin V$, im Widerspruch zur Annahme. Es existiert also zu jedem $z \in V$ eine Umgebung, die keinen HP von $N(f)$ enthält. D.h., alle Punkte aus dieser Umgebung sind kein HP von $N(f)$. Also ist V offen. Da $D = U \cup V$ zusammenhängend ist und in U zumindest a enthalten ist, muß V leer sein $\Longrightarrow$ ganz D besteht aus HP von $N(f) \Longrightarrow f \equiv 0$.
- **Identitätssatz für analytische Funktionen:** Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen, die

auf dem *gesamten Gebiet* $D \neq \emptyset$ definiert sind, so sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $f = g$

b) Die Koinzidenzmenge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in D.

c) Es gibt einen Punkt $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- **Beweis:** Beweis von *b)* $\Longrightarrow$ *a)* über obigen Hilfssatz und $f - g$ anstelle von f. Der Beweis von *c)* $\Longrightarrow$ *a)* geht über (eindeutige) Potenzreihenentwicklung: $f(z) = g(z)$ in einer ganzen Umgebung $U(z_0)$, die Koinzidenzmenge hat also einen HP in D.
- **Folgerung:** Hat $M \subset D$ einen Häufungspunkt in D (z.B. M nicht leer und offen) und besitzt die Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ eine *analytische* Fortsetzung $\tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist diese eindeutig.
- Das bedeutet:

a) Zwei analytische Funktionen auf einem Gebiet stimmen bereits dann überein, wenn sie auf einem Wegstückchen oder auf einer Folge (z_n), mit $z_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, übereinstimmen.

b) Reelle Funktionen exp, sin, cos, $sinh$, etc. lassen sich also nur auf eine Weise analytisch ins Komplexe fortsetzen. Funktionalgleichungen übertragen sich ins Komplexe (Achtung bei der Funktionalgleichung des reellen Logarithmus).

c) Wichtig ist, daß die Koinzidenzmenge nicht diskret *in* D ist. Warnungsbeispiel: $D = \mathbb{C}^\bullet$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = sin(\frac{1}{z})$, $g(z) = 0$.

d) Außerdem muß D ein Gebiet sein, insbesondere zusammenhängend. Warnungsbeispiel: $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, $D_1, D_2 \neq \emptyset$, offen, $f_{|D_1} = 1$, $f_{|D_2} = 0$, $g(z) = 0$.

e) Die Voraussetzung 'zusammenhängend' ist wegen des Gegenbeispiels notwendig und für den Beweis des Hilfssatzes hinreichend. Die Offenheit wird benötigt, damit überhaupt *analytische* Funktionen auf ganz D betrachtet werden können. Also ist beim Identitätssatz *zwingend* ein Gebiet vorauszusetzen.

- **Defnition:** Ist eine reellwertige Funktion $f \in C^\infty(M)$ für alle $a \in M$ lokal in eine Taylorreihe entwickelbar, so heißt sie reell-analytisch.
- **Satz:** Eine Funktion $f : M \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt genau dann eine analytische Fortsetzung auf ein Gebiet, wenn f reell-analytisch ist.
- Die analytischen Funktionen auf $D \subset \mathbb{C}$, offen, bilden einen kommutativen, nullteilerfreien Ring: $f\,g \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0 \vee g \equiv 0$.
- **Satz von der Gebietstreue:** Ist f eine nichtkonstante analytische Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.
- **Beweis:** Zu zeigen ist:

1. $f(D)$ ist offen.
   Sei $a \in D$. Mit 2 Translationen erhält man $a = f(a) = 0$. Es gilt $f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + ...) =: z^n h(z)$, mit $n := min\{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, a_k \neq 0\}$. $h(z)$ besitzt in einer vollen Kreisscheibe $U_r(0)$ eine

analytische n-te Wurzel $h_0(z) \Longrightarrow f_0'(0) \neq 0 \Longrightarrow$ Mit dem Satz über implizite Funktionen ist f_0 in einer ganzen Umgebung von 0 injektiv, also enthält der Wertevorrat von f_0 eine ganze Umgebung von 0. Die Funktion $\zeta \longmapsto \zeta^n$ bildet die Umgebung $U_{\tilde{r}}(0)$ wieder auf eine Umgebung $U_R(0)$ ab $\Longrightarrow f(D)$ ist offen.

2. $f(D)$ ist bogenweise zusammenhängend.

   Dies folgt allein schon aus der Stetigkeit von f.

- Der Satz gilt nicht im Reellen: $\sin x :]0, 2\pi[\longrightarrow [-1, 1]$, oder auch: $x^2 :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow [0, \epsilon^2[$.
- Durch den Beweis ist auch das lokale Abbildungsverhalten einer analytischen Funktion geklärt:

Jede analytische Funktion f mit $f(0) = 0$ ist in einer kleinen offenen Umgebung von 0 die Zusammensetzung einer konformen Abbildung (f_0 ist analytisch und in $U_r(0)$ injektiv, mit einer geeigneten Bildmenge also bijektiv) mit der n-ten Potenz: $f(z) = (f_0(z))^n$, mit $f_0'(0) \neq 0$. Die Winkel im Nullpunkt werden ver-n-facht.

- Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$ und injektiv, so muß f (im Kleinen) konform sein (und zwar in ganz D), da nur die 1. Potenz injektiv ist (keine höhere), f selbst also schon konform ist. Im kleinen konforme Abbildungen haben in ganz D eine von Null verschiedene Ableitung.
- **Definition:** Ein Punkt $a \in D$ heißt innerer Punkt, wenn mit a auch noch $U_\epsilon(a)$ in D enthalten ist.
- **Folgerung:** Ist $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und gilt $Re\, f = const \vee Im\, f = const \vee |f| = const$, dann ist f selbst konstant.
- **Beweis:** Mit den Voraussetzungen ist $f(z)$ für kein $z \in D$ innerer Punkt von $f(D)$. Also ist $f(D)$ kein Gebiet.
- **Folgerung, Maximumprinzip:** Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und nimmt f ein lokales Betragsmaximum an, so ist f konstant.
- **Beweis:** $\exists\, a \in D \wedge \exists\, U_\epsilon(a) \;:\; |f(z)| \leq |f(a)|, \forall z \in U_\epsilon(a)$. Sei f nicht konstant, dann ist $f(a)$ nach dem Satz von der Gebietstreue innerer Punkt von $f(U_\epsilon(a))$, d.h. $\exists\, f(z) \in f(U_\epsilon(a)) \;:\; |f(z)| \geq |f(a)| \Longrightarrow f = const =: c$ auf $|f(z)| \leq |f(a)|$. Nun hat die Koinzidenzmenge mit $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g(z) := c$, einen Häufungspunkt in D, z.B. a, also gilt $f = g = const$ auf ganz D.
- Zusatz: Ist $K \subset D$ kompakt, so nimmt $f_{|_K}$ ein Betragsmaximum an. Ist f konstant, so wird das Maximum natürlich auch auf dem Rand angenommen. Sei also f nicht konstant. Angenommen, das Betragsmaximum würde in $\overset{\circ}{K}$ angenommen, dann wäre dies ein *lokales* Betragsmaximum *in* D, also wäre f konstant. Also muß das Betragsmaximum notwendig auf ∂K angenommen werden.
- **Folgerung, Minimumprinzip:** Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und *nicht konstant*, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und nimmt f in a ein lokales Betragsminimum an, dann ist notwendig $f(a) = 0$.
- **Beweis:** Wäre $f(a) \neq 0$, dann hätte $\frac{1}{f}$ in a lokales Betragsmaximum, f wäre konstant.
- **Folgerung aus dem Minimumprinzip, Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:**

Ein Polynom auf $\mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ ist analytisch und nicht konstant. Wegen $\lim\limits_{z \to \pm\infty} |P(z)| = \infty$ besitzt $P(z)$ ein *Betrags*minimum, also eine Nullstelle.

- **Schwarzsches Lemma (Schwarz, 1869):** Ist $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ analytisch mit $f(0) = 0$, dann gilt

$$|f(z)| \leq |z| \text{ und } |f'(0)| \leq 1 \tag{12}$$

- Aus dem Schwarzschen Lemma erhält man schließlich über die folgenden zwei Hilfssätze eine Darstellung aller im Großen konformen Selbstabbildungen der Einheitskreisscheibe in sich.
- **Hilfssatz:** Sei $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ im Großen konform, mit $\varphi(0) = 0$. Dann existiert eine komplexe Zahl ζ vom Betrag 1 mit der Eigenschaft $\varphi(z) = \zeta z$.

φ ist also eine Drehung um den Nullpunkt.
- **Hilfssatz:** Sei $a \in \mathbb{E}$. Dann wird durch

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \tag{13}$$

eine im Großen konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich definiert, so daß $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.
- **Satz:** Ist $\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ im Großen konform, so existieren eine komplexe Zahl ζ vom Betrag 1 und ein Punkt $a \in \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft $\varphi(z) = \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.
- $\{\varphi\}$ ist die

$$\text{Automorphismengruppe } Aut(\mathbb{E}) \text{ von } \mathbb{E} \tag{14}$$

bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

2.10 Singularitäten

- **Definition:** $a \notin D$ ist eine (isolierte) Singularität der analytischen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn eine punktierte Kreisscheibe $\dot{U} := \dot{U}_r(a)$ existiert, die ganz in D enthalten ist.
- **Definition:** Eine Singularität a heißt hebbar, falls sich f auf ganz $D \cup \{a\}$ analytisch fortsetzen läßt.
- **Riemannscher Hebbarkeitssatz (Riemann, 1851):** Eine Singularität a einer analytischen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann hebbar, wenn es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(a)$ von a gibt, in der f beschränkt ist.
- **Beweis:** Ist a hebbar, existiert also eine analytische Fortsetzung von f auf a, so ist f in a stetig und es existiert also eine Umgebung $U_\epsilon(a)$, so daß f in $U_\epsilon(a)$ beschränkt ist, insbesondere also in $\dot{U}_\epsilon(a)$.

Sei nun o.B.d.A. $a = 0$. Aus der Beschränktheit von f in $\dot{U}$ und $h(z) := \begin{cases} z^2 f(z) & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$ kann man die analytische Fortsetzung von f (als Potenzreihe) konstruieren, indem man zeigt, daß $h(z)$ in $z = 0$ analytisch ist.
- **Definition:** Eine Singularität a einer analytischen Funktion f heißt außerwesentlich, wenn ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so daß $(z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in a hat.

Eine außerwesentliche Singularität , welche *nicht* hebbar ist, heißt auch Pol. m ist i.A. nicht eindeutig.
- Ist f nicht die Nullfunktion, so existiert sogar ein kleinstes

$$k = min\{m \in \mathbb{Z} \,|\, (z-a)^m f(z) \text{ hat hebbare Singularität in } a\},$$

das charakterisiert ist durch: $h(z) = (z-a)^k f(z)$ hat in a hebbare Singularität und $h(a) \neq 0$ ($h(a) = a_n$).
- **Definition:** Die Ordnung von f in a ist $ord(f;a) := -k$ (die niedrigste Potenzordnung von f).
- Es gilt: $ord(f;a) < 0 \Longleftrightarrow a$ ist Pol (dann heißt $k = -ord(f;a)$ Polordnung von f. Ist $k = 1$, so heißt der Pol einfach)

$ord(f;a) \geq 0 \Longleftrightarrow a$ ist hebbar $[ord(f;a) = 0 \Longleftrightarrow a$ ist hebbar und $f(a) \neq 0$ (wäre $f(a) = 0$, dann wäre ja $h(a) = 0$)]

- Beispiel: $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} = z^{-2}(1+z)$. Damit ist $g(z) = z^2 f(z)$ hebbar in $z = 0$, also: $ord(f;0) = -2$, die Polordnung von f ist 2.
- Für ∞ gilt: $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty$ und $x < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Ist a außerwesentliche Singularität der analytischen Funktionen f, g, dann ist a auch außerwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f \pm g$, $f\,g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$. Außerdem gilt $ord(fg;a) = ord(f;a) + ord(g;a)$ und $ord(\frac{f}{g};a) = ord(f;a) - ord(g;a)$
- **Definition:** Ist eine Singularität nicht außerwesentlich, so heißt sie wesentlich.
- Hat f in a einen Pol, dann gilt: $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in D}} |f(z)| = \infty$.
- **Satz von Casorati-Weierstraß (Casorati, 1868; Weierstraß, 1876):**

Sei a eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\dot{U}$ eine beliebige punktierte Umgebung von a, dann liegt das Bild $f(\dot{U} \cap D)$ dicht in $\mathbb{C}$.

- D.h. $\forall b \in \mathbb{C}\,, \forall \epsilon > 0\, f(\dot{U} \cap D) \cap U_\epsilon(b) \neq \emptyset$. Also: $\forall b \in \mathbb{C}\,, \forall \epsilon > 0\, \exists z \in \dot{U} \cap D \;:\; |f(z) - b| < \epsilon$,

f kommt in jeder beliebig kleinen punktierten Umgebung von a jedem Wert aus $\mathbb{C}$ beliebig nahe.

- **Beweis:** Aus der Annahme $|f(z) - b| \geq \epsilon\,, \forall\, z \in \dot{U} \cap D$, $b \in \mathbb{C}$ und $g(z) = \frac{1}{f(z)-b}$ folgert man über den Riemannschen Hebbarkeitssatz, daß auch $f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$ nur eine außerwesentliche Singularität in a hat.
- Es gilt auch die Umkehrung und man erhält eine Klassifizierung der isolierten Singularitäten:

Die Singularität a von f ist

a) hebbar $\Longleftrightarrow$ f ist in einer geeigneten punktierten Umgebung von a beschränkt.

b) ein Pol $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$

c) wesentlich $\Longleftrightarrow$ in jeder punktierten Umgebung von a kommt f jedem Wert aus $\mathbb{C}$ beliebig nahe.

- **Großer Satz von Picard, (Picard 1879/80):** f nimmt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität a jeden Wert aus $\mathbb{C}$ bis auf *höchstens* eine Ausnahme an.
- Beispiele: $\sin\frac{1}{z} : \dot{U}_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\exp\frac{1}{z} : \dot{U}_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet$
- Dirichlet-Integral: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ (also $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi$) über Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete und den Integrationsweg in Abb.3. Dazu geht man von der analytischen Funktion $\frac{exp(iz)}{z}$ aus, welche die Darstellung $\frac{\sin(x)}{x} = 2i\frac{exp(ix) - exp(-ix)}{x}$ impliziert.

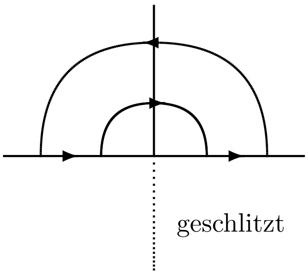


Abb.3

- **Definition:** Ein Ringgebiet ist $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z| < R\}$, mit $0 \leq r < R \leq \infty$.
- Sind $g : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$, $h : U_{\frac{1}{r}}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, so erhält man sofort eine auf $\mathcal{R}$ analytische Funktion $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$, für $r < |z| < R$. Umgekehrt gilt:

- **Theorem, Laurentzerlegung (Laurent, 1843; Weierstrass 1841):**

Jede auf einem Ringgebiet $\mathcal{R}$ analytische Funktion f hat eine Zerlegung der Form $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$. Dabei sind $g : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ und $h : U_{\frac{1}{r}}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch.

Fordert man noch $h(0) = 0$, so ist die Zerlegung eindeutig.

- **Beweis:**

1. Eindeutigkeit für $h(0) = 0$.
   Zu zeigen ist, daß $f(z) \equiv 0 = G(z) + H(\frac{1}{z})$ eine eindeutige Zerlegung hat. Dazu kann man G und H zu einer *ganzen* Funktion verschmelzen. Über Liouville erhält man die Eindeutigkeit.

2. Existenz über den "Cauchyschen Integralsatz für Ringgebiete"[1], den man durch sternförmige Kreissegmente (Skizze) auf den Satz über Sterngebiete zurückführt. Nun betrachtet man die kleineren Ringgebiete $r < \rho < P < R$. Dann konstruiert man explizit die Zerlegung von f durch die Funktionen g und h, die wirklich nur auf den vorausgesetzten Kreisscheiben $U_R(0)$ und $U_{\frac{1}{r}}(0)$ definiert sind.

- Die Potenzreihenentwicklung von f ist i.A. nicht auf ganz $\mathcal{R}$ die gleiche, da $\mathcal{R}$ nicht in einer vollen Kreisscheibe innerhalb des Definitionsbereichs von f liegt. Aber die Laurententwicklung erlaubt die eindeutige Entwicklung von sowohl $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $U_R(0)$ als auch $h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ in $U_{\frac{1}{r}}(0)$.
- **Definition:** Mit $a_{-n} := b_n$ erhält man die Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$
- Ist f auf $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ analytisch, so läßt sich f also in eine Laurentreihe entwickeln, welche *in diesem* Gebiet normal konvergiert (g, h sind analytisch also in Potenzreihen entwickelbar, die im Inneren ihres Konvergenzbereichs, insbesondere also auf $\mathcal{R}$, normal konvergieren):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Es gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta\,, \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ und } r < \rho < R$$

Für die Koefizienten a_n gelten außerdem die Cauchyschen Abschätzungsformeln: Ist M_ρ das Supremum von $|f|$ auf dem Kreis um a mit Radius ρ, so gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$.
- Da $\dot{U}$ Ringgebiet ist, läßt sich jede analytische Funktion in der Umgebung $\dot{U}$ um eine isolierte Singularität a in eine Laurentreihe entwickeln.
- **Satz:** Eine Singularität a ist

1. hebbar $\Longleftrightarrow a_n = 0\,,\ \forall\, n < 0$
2. ein Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ :\ a_{-k} \neq 0 \wedge a_n = 0\,,\ \forall n < -k$
3. wesentlich $\Longleftrightarrow a_n \neq 0$, für unendlich viele $n < 0$

- **Beweis:** 1. Ist a hebbar, so existiert eine Umgebung $\dot{U}(a)$, in der f beschränkt ist, aber $(z-a)^n \to \infty$, $(z \to a)$ für alle $n < 0$. Ist umgekehrt $a_n = 0\,,\ \forall n < 0$, so gilt $\tilde{f}(a) = a_0$, also ist f in a analytisch

[1] Ist $G : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und $r < \rho < P < R$, so gilt: $\oint\limits_{|\zeta|=\rho} G(\zeta) d\zeta = \oint\limits_{|\zeta|=P} G(\zeta) d\zeta$

fortsetzbar.

2. a ist Pol der Ordnung k ($\Longrightarrow ord(f;a) = -k$), also gilt: $h(a)(= a_k) \neq 0$ und $h(z) = (z-a)^k f(z)$ hat in a eine hebbare Singularität $\Longleftrightarrow h_n = 0\,,\ \forall n < 0 \wedge h(a) = h_0 \neq 0 \Longrightarrow f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}$, mit $a_{-k} \neq 0 \wedge a_n = 0\,,\ \forall n < -k$. Gilt umgekehrt $a_{-k} \neq 0 \wedge a_n = 0\,,\ \forall n < -k \Longrightarrow h(z) = (z-a)^n f(z)$ hat hebbare Singularität in a, denn $h(a) = a_{-k} < \infty \wedge h(a) = a_{-k} \neq 0 \Longrightarrow f$ hat Pol der Ordnung k.

3. a wesentlich $\Longleftrightarrow a$ nicht außerwesentlich $\Longleftrightarrow a$ nicht hebbar $\wedge\, a$ ist kein Pol $\Longleftrightarrow a_n = 0\ \forall n < 0 \wedge \nexists\, k \in \mathbb{N}\ :\ (a_{-k} \neq 0 \wedge a_n = 0\,, \forall n < -k) \Longleftrightarrow a_n \neq 0\,,$ für unendlich viele $n < 0$.

- Ein und dieselbe Funktion f kann bei gleichem Entwicklungspunkt, aber verschiedenen Ringgebieten völlig verschiedene Laurentreihen besitzen, z.B. $f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3}$
- **Partialbruchzerlegung:** Zu einer echt gebrochenrationalen Funktion mit Nenner $C(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_n)^{\nu_n}$ existiert eine Zerlegung

$$\frac{Z\ddot{a}hler}{C(z-z_1)^{\nu_1}...(z-z_n)^{\nu_n}} = \left(\frac{a_{11}}{(z-z_1)} + \frac{a_{12}}{(z-z_1)^2} + ... + \frac{a_{1\nu_1}}{(z-z_1)^{\nu_1}}\right) + ...+ \left(\frac{a_{n1}}{(z-z_n)} + \frac{a_{n2}}{(z-z_n)^2} + ... + \frac{a_{n\nu_1}}{(z-z_n)^{\nu_1}}\right)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit allen $\frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j}$, so erhält man die Zahlen a_{ij} durch Koeffizientenvergleich.

- **Satz:** Sei f eine analytische Funktion in dem Horizontalstreifen

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid a < y < b\}, \qquad (-\infty \leq a < b \leq \infty)$$

mit der Periode 1. Dann läßt sich f in eine normal konvergente komplexe Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$$

entwickeln. Die (Fourier-)Koeffizienten a_n sind eindeutig bestimmt und für jedes $y \in]a, b[$ gilt: $a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} dx\ (z = x + iy)$

- Für jedes feste y der zwei mal stetig differenzierbaren Funktion $f(x,y)$ existiert aus der "reellen" Analysis die *komplexe* Fourierentwicklung $f(x,y) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e^{2\pi i n x}$, mit $a_n(y) = \int_0^1 f(x,y) e^{-2\pi i n x} dx$.

2.11 Meromorphe Funktionen

- **Definition:** Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, heißt meromorph, falls

  1. Die Menge $S(f) = f^{-1}(\{\infty\})$ der Unendlichkeitsstellen von f ist diskret in D.
  2. $f_0 : D \setminus S(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist analytisch.
  3. Die Punkte aus $S(f)$ sind die Pole von f_0.

- Sind f, g meromorph, dann auch $f \pm g$, fg, f' und $\frac{f}{g}$, falls die Nullstellenmenge von g diskret in D ist. g darf also z.B. nicht die Nullfunktion sein. (Wäre g stückweise Null, dann wäre g nach dem Identitätssatz sogar die Nullfunktion. Der Identitätssatz benötigt aber ein Gebiet. *Deshalb* wird $\mathcal{M}(D)$ auf einem *Gebiet* zum Körper.)
- $\hookrightarrow$ Die Gesamtheit der Meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(D)$ auf einem Gebiet D ist ein Körper.

Die Gesamtheit der analytischen Funktionen $\mathcal{O}(D)$ ist ein Unterring (durch die Identifikation $f \sim \tilde{f} = i \circ f$, über die kanonische Inklusion $i : \mathbb{C} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$).

- Damit ergibt sich eine Folgerung aus dem Identitätssatz: Null- und Polstellenmengen analytischer Funktionen $f(\not\equiv 0)$ sind diskrete Teilmengen des jeweiligen Definitionsbereichs: Die Aussage über die Nullstellenmenge wird schon im Beweis des Identitätssatzes geliefert. Für die Polstellenmenge betrachtet man $\frac{1}{f}$.
- Lokal läßt sich eine meromorphe Funktion immer als Quotient analytischer Funktionen darstellen (dies ist stets auch global möglich), weil nur Pole vorhanden sind.
- **Definition:** Eine Menge $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ heißt offen, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

  1. $D \cap \mathbb{C}$ ist offen.

  2. Ist $\infty \in D$, so existiert ein $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\} \subset D$.

- $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ ist offen $\Longleftrightarrow \hat{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^{-1} \in D\}$ ist offen. $z \in \hat{D} \Longleftrightarrow z^{-1} \in D$.
- **Definition:** Eine Abbildung $f : D \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ offen, heißt meromorph, falls

  1. f ist in $D \cap \mathbb{C}$ meromorph.

  2. Die Funktion $\hat{f}(z) := f(\frac{1}{z})$ ist in der offenen Menge $\hat{D}$ meromorph.

- Ist $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ offen und enthält ∞, und ist $f : D \setminus \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, so nennt man die Singularität ∞ von f hebbar, außerwesentlich bzw. wesentlich, wenn die Funktion $\hat{f}$ die entsprechende Eigenschaft für die Singularität 0 besitzt.
- Die Laurententwicklung von f im Punkt ∞ erhält man, indem man die Laurententwicklung von $\hat{f}$ im Punkt 0 betrachtet.
- Analytische Funktionen nehmen nach Definition den Wert ∞ nicht an.
- $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ heißt Gebiet, wenn $D \cap \mathbb{C}$ ein Gebiet ist.
- Obwohl $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ ist, wird mit $\mathcal{O}(D)$ wieder der Unterring aller analytischen Funktionen bezeichnet (f ist in ∞ analytisch, wenn $\hat{f}$ in 0 analytisch ist). Auch $\mathcal{M}(D)$ ist wieder ein Körper.
- **Satz:** Die meromorphen Funktionen auf ganz $\bar{\mathbb{C}}$ sind genau die rationalen Funktionen.
- Aus dem Beweis erhält man die
- **Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen:** Jede rationale Funktion ist Summe eines Polynoms und einer endlichen Linearkombination von rationalen Funktionen der Gestalt $z \longmapsto \frac{1}{(z-s)^n}$, $n \in N$.
- **Variante von Liouville:** *Jede* analytische Funktion $f : \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.
- **Beweis:** f nimmt in ∞ einen Wert $b \in \mathbb{C}$ an $(f(z) \to b,\ (z \to \infty))$. f nimmt in $\mathbb{C}$ den Wert ∞ nicht an, also ist f beschränkt in ganz $\mathbb{C}$ und damit konstant.
- $\bar{\mathbb{C}}$ ist ein kompakter topologischer Raum, denn $\bar{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zur Riemann-Sphäre.
- Eine rationale Funktion definiert genau dann eine bijektive Abbildung der Zahlkugel auf sich, wenn sie von der Gestalt $\frac{az+b}{cz+d}$ ist, mit $ad - bc \neq 0$ (Möbiustransformation).
- **Satz:** Die Abbildung $GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{M}$, die einer Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die entsprechende Möbiustransformation zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus. Zwei Matrizen definieren genau dann dieselbe Möbiustransformation, wenn sie sich um einen skalaren Faktor $\neq 0$ unterscheiden.

- **Folgerung:** Die zu M gehörige inverse Möbiustransformation ist $M^{-1}z = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

2.12 Residuensatz

- Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und die k-fach durchlaufene Kreilinie $\epsilon_k(t) := z_0 + r\,exp(2\pi ikt)$, $(0 \leq t \leq 1)$ gilt aus Hilfssatz (9):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\epsilon_k} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} k & , |z - z_0| < r \\ 0 & |z - z_0| > r \end{cases}$$

- **Definition:** Sei α stückweise glatt und $z \notin Bild(\alpha)$. Dann ist die Umlaufzahl (auch Windungszahl, Index) von α bzgl. z definiert durch

$$\chi(\alpha; z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \tag{15}$$

- Das Integral "mißt" die Gesamtänderung des Arguments von $Bild(\alpha(t))$.
- Verläuft α in einem Elementargebiet D, so ist $\chi(\alpha; z) = 0$, für $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Hier deutet sich an, daß Elementargebiete gerade die Gebiete ohne Löcher sind.
- Mit der Umlaufzahl läßt sich das Innere $Int(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus Bild(\alpha) | \chi(\alpha; z) \neq 0\}$ und das Äußere $Ext(\alpha) := \{z \in \mathbb{C} \setminus Bild(\alpha) | \chi(\alpha; z) = 0\}$ einer (stückweise glatten) Kurve definieren.
- Verläuft eine kompliziertere Kurve in einem Elementargebiet, so kann man sie durch eine einfachere Kurve, etwa eine Gerade oder einen Kreisbogen, ersetzen.
- **Definition:** Ist a eine Singularität einer analytischen Funktion f und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ihre Laurententwicklung, so nennt man $a_{-1} =: Res(f; a)$ das Residuum von f an der Stelle a. (Es existiert immer ein entsprechendes Ringgebiet, da a isolierte Singularität ist.)
- Nach der Koeffizientenformel der Laurent-Entwicklung gilt:

$$Res(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\rho = |\zeta - a|} f(\zeta) d\zeta$$

- Bei hebbaren Singularitäten ist das Residuum Null, da a_{-1} immer Null ist. $Res(\frac{1}{z}; 0) = 1$, $Res(\frac{1}{z^2}; 0) = 0$.
- **Residuensatz (Cauchy, 1826):**

Sei D Elementargebiet und $z_1, ..., z_k \in D$ endlich viele (paarweise verschiedene) Punkte. Sei nun $f : D \setminus \{z_1, ..., z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch sowie α eine geschlossene Kurve, deren Bild durch keinen der Punkte z_i geht. Dann gilt:

Residuenformel: $$\oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f; z_j) \chi(\alpha; z_j)$$

- **Beweis:** Subtrahiert man von $f(z)$ alle Hauptteile der Entwicklungen um die Singularitäten z_j, so läßt sich die entstandene Funktion in ganz D analytisch fortsetzen. $f(\zeta) - \sum_{j=1}^{k} h_j(\frac{1}{\zeta - z_j})$ hat aber sich selbst als Fortsetzung, da gerade alle kritischen Terme von f abgezogen werden. Es gilt also:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^{k} \oint_{\alpha} \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n^{(j)} (\zeta - z_j)^n d\zeta \\ &= \oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta - \sum_{j=1}^{k} a_{-1}^{(j)} \oint_{\alpha} \frac{1}{\zeta - z_j} d\zeta \end{aligned}$$

• Nur die Singularitäten $z_j \in Int(\alpha)$ liefern einen Beitrag (die anderen haben $\chi(f; z_i) = 0$).

• Ist f auf ganz D analytisch fortsetzbar, also $a_{-1}^{(j)} = 0$, $\forall j$, so gilt $\oint_\alpha f(\zeta)d\zeta = 0$. Der Residuensatz ist also eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

• Ist f analytisch im Elementargebiet D, $z \in D$, so ist $h : D \setminus \{z\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und

$$\zeta \longmapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

$Res(h; z) = \lim\limits_{\zeta \to z} (\zeta - z)\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(z)$.

• Nach dem Residuensatz gilt also:

$$\begin{aligned} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_\alpha h(\zeta)d\zeta = 2\pi i\, Res(h; z)\chi(\alpha; z) \\ &= 2\pi i\, f(z)\chi(\alpha; z) \end{aligned}$$

• $\Longrightarrow$ Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel auf beliebige geschlossene Kurven α:

$$\chi(\alpha; z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

• **Berechnung von Residuen:** (D muß kein Elementargebiet sein. Man benötigt nur die Laurententwicklung, um die Residuen a_{-1} zu berechnen.)

1. Ist a ein Pol der Ordnung k, so gilt $Res(f; a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$, mit $g(z) = (z - a)^k f(z)$. Denn $g(z) = ... + a_{-1}(z - a)^{k-1} + ...$
   Für $ord(f; a) \geq -1$ gilt insbesondere: $Res(f; a) = \lim\limits_{z \to a} (z - a)f(z)$.
2. Auf Letzteres läßt sich $Res(\frac{f}{g}; a)$ zurückführen: Ist $ord(f; a) \geq 0$ und $ord(g; a) = 1$, so gilt allgemein $ord(\frac{f}{g}; a) \geq -1$. Wegen $ord(f; a) \geq 0$ ist f in a durch seine Potenzreihe analytisch fortsetzbar. Wegen $ord(g; a) = 1$ gilt $g(z) = (z - a)(g_1 + g_2(z - a) + ...)$, also $g(a) = 0$. Damit folgt:
$$Res(\frac{f}{g}; a) = \lim_{z \to a} (z - a)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(a)}{z - a}} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$
3. Ist f nicht die Nullfunktion, so gilt für alle $a \in D$: $Res(\frac{f'}{f}; a) = ord(f; a)$
4. Ist g analytisch, so gilt $Res(g\frac{f'}{f}; a) = g(a)ord(f; a)$

2.13 Anwendungen des Residuensatzes

• Aus Regel 3. und dem Residuensatz folgt der

• **Satz:** Sei D ein Elementargebiet, f eine *meromorphe* Funktion mit den Nullstellen $a_1, ..., a_n \in D$ und den Polstellen $b_1, ..., b_m \in D$.

Dann gilt für jede geschlossene (stückweise glatte) Kurve α in D, auf deren Bild keine Pol- oder Nullstellen von f liegen:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta = \sum_{\mu=1}^{n} ord(f; a_\mu)\chi(\alpha; a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{m} ord(f; b_\nu)\chi(\alpha; b_\nu)$$

• **Folgerung: Satz von Hurwitz (Hurwitz, 1889)** Sei $f_0, f_1, ... : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von in einem Gebiet D nullstellenfreien analytischen Funktionen, welche lokal gleichmäßig gegen die (dann auch analytische) Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt:

f ist entweder identisch Null, oder f hat ebenfalls keine Nullstelle in D.

- **Folgerung des Satzes von Hurwitz:** Sind die Funktionen f_ν injektiv (anstelle von nullstellenfrei), dann ist f entweder konstant oder ebenfalls injektiv.

- **Definition:** $N(0) := \sum_{\mu=1}^{n} ord(f;a_\mu) = Gesamtanzahl\ der\ Nullstellen$, $N(\infty) := -\sum_{\nu=1}^{m} ord(f;b_\nu) = Gesamtanzahl\ der\ Polstellen$ (mit Vielfachheiten gerechnet).

- **Spezialfall des obigen Satzes:** Umläuft die Kurve α alle Pol- und Nullstellen genau einmal, dann gilt die *Anzahlformel für Null- und Polstellen*:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta = N(0) - N(\infty) \tag{16}$$

- Hat f keine Pole, dann gilt: Die Verallgemeinerung ist die Formel für die w-Stellen $N(w)$ von f, indem man die NS von $\tilde{f}(z) := f(z) - w$ betrachtet: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}(\zeta)d\zeta = N_{\tilde{f}}(0) = N_f(w)$.

- **Folgerung aus (16):** Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und ist $Bild(\alpha) \neq 0$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f'}{f}(\zeta)d\zeta = \chi(f\circ\alpha;0) = N(0)$$

- **Satz von Rouché (Rouché, 1862):** Seien f, g analytisch auf dem Elementargebiet D und α eine geschlossene Kurve in D, welche jeden Punkt in ihrem Inneren $Int(\alpha)$ genau einmal umläuft. Ist $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$, für $\zeta \in Bild(\alpha)$, dann haben die Funktionen $f, f+g$ in $Int(\alpha)$ gleichviele Nullstellen.

- Dieser Satz bedeutet die Invarianz von $N(0)$ bei einer kleinen Störung.

- Durch den Satz von Rouché erhält man Informationen über die Lage von Nullstellen: Man kann deren Bereich eingrenzen.

- Über die Anzahlformel für Null- und Polstellen folgt ein weiterer **Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra**:

Wegen $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$ existiert ein $R > 0$, so daß für alle z mit $|z| > R$ $P(z) \neq 0$. P ist meromorph und hat keine Pole. Nach (16) gilt: $N(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=R} \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)}d\zeta$. Die Funktion $\frac{P'}{P}$ hat in ∞ eine Nullstelle 1. Ordnung. Ihre Laurententwicklung um ∞ ist von der Form $\frac{n}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + ...$ $(n = Grad(P)) \Longrightarrow N(0) = n$ (mit Vielfachheiten gerechnet).

- **Berechnung von Integralen:**

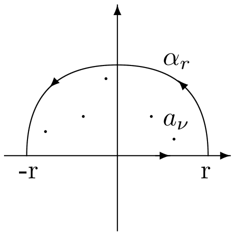
Für gebrochenrationale Funktionen, die $\cos t$ bzw. $\sin t$ enthalten, gilt der

- **Satz:** Seien P, Q Polynome in zwei Variablen $x, y \in \mathbb{S}^1$ und Q immer ungleich Null (auf S^1), aber mit Nullstelle $a \in \mathbb{E}$, dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}dt = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{E}} Res(f;a) \qquad , \text{ mit } \ f(z) = \frac{1}{iz}\frac{P\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)}{Q\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)}$$

- Der 'Cauchysche Hauptwert' $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$ ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, falls $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ und $\int_0^\infty f(x)dx$ getrennt existieren.

- **Uneigentliche Integrale:** Sei $f : D \setminus \{a_1, ..., a_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch (D ein Elementargebiet) mit dem Integrationsweg



$a_\nu \in \bar{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im\, z \geq 0\}$

wobei $r > |a_\nu|$. Nach dem Residuensatz gilt (α umläuft alle Singularitäten ein mal):

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\alpha_r} f(z)dz = \int_{\alpha} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} Res(f; a_\nu)\ .$$

Gilt nun $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z)dz = 0$, so folgt $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} Res(f; a_\nu)$. Weiß man auch noch, daß sogar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} Res(f; a_\nu)$$

• Dies ist etwa der Fall für $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, mit Polynomen P, Q, $Grad(Q) \geq 2 + Grad(P)$ und dem obigen Integrationsweg in $\bar{\mathbb{H}}$, falls Q keine *reelle* Nullstelle hat.

• Gilt dagegen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} exp(i\alpha z)$, mit $\alpha > 0$, aber $Grad(Q) \geq 1 + Grad(P)$, so folgt mit den restlichen obigen Voraussetzungen auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} exp(i\alpha t)dt = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} Res(f; a_\nu)$$

• Gilt dagegen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \underbrace{(-z)^{\lambda-1}}_{(Hauptwert)}$, mit $\lambda > 0$, aber $Grad(Q) > \lambda + Grad(P)$, sowie $P(0) \neq 0$, so folgt mit den restlichen obigen Voraussetzungen auch

$$\int_{0}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\lambda-1}dx = \frac{\pi}{sin(\lambda\pi)} \sum_{a\in\mathbb{C}_+} Res(f; a)$$

• **Partialbruchentwicklung des Cotangens:**

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right]$$

2.14 Die Gammafunktion

• **Definition:** Eine Funktion f heißt absolut integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

• **Definition:** Die Gammafunktion (das Eulersche Integral):

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

mit $t^{z-1} := e^{(z-1)\log t}$, $(Re\, z > 0)$.

• **Satz:** Das Gammaintegral $\Gamma(z)$ konvergiert in der Halbebene $Re\, z > 0$ absolut und stellt dort eine analytische Funktion dar. Für die Ableitungen gilt:

$$\Gamma^{(k)}(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1}(\log t)^k e^{-t}dt$$

- Durch partielle Integration der Γ-Funktion erhält man die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, insbesondere also die Interpolation der Fakultät: $\Gamma(n+1) = n!$ (es gilt $\Gamma(1) = 1$).
- Iterierte Anwendung der Funktionalgleichung liefert

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)...(z+n)} \tag{17}$$

Die rechte Seite der Gleichung hat den vergrößerten Definitionsbereich $\{Re\, z > -(n+1)\ ,\ z \notin \mathbb{Z}_0^-\}$ und ist dort analytisch, also ist (17) die analytische Fortsetzung der Γ-Funktion. Insbesondere ist die Γ-Funktion in ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ analytisch fortsetzbar und genügt dort der Funktionalgleichung. Die in $\mathbb{C}$ diskrete Menge der Ausnahmestellen besteht nur aus Polen 1. Ordnung. Die Γ-Funktion ist also eine in $\mathbb{C}$ *meromorphe* Funktion. Aus (17) folgt: $Res(\Gamma; -n) \left(= \lim\limits_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) \right) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

- **Satz (Charakterisierung der Γ-Funktion), (Wielandt, 1939):**

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, welches den Vertikalstreifen $1 \leq x < 2$ enthält, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die auf dem Vertikalstreifen beschränkt ist und für die gilt: $f(z+1) = z\,f(z)$, für $z, z+1 \in D$. Dann gilt: $f(z) = f(1)\Gamma(z)$, für $z \in D$.

- **Beweis (Skizze):** Man kann f über die Funktionalgleichung auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ fortsetzen. Die Differenz $f - \Gamma$ hat nur hebbare Singularitäten, ist also ganz. Über den Satz von Liouville (und einigen Tricks) erhält man schließlich $f - \Gamma \equiv 0$.
- Da bei unendlichen Produkten einige Faktoren auch Null sein können, kann man nicht $\prod_{n=1}^{\infty} b_n := exp \sum_{n=1}^{\infty} Log(b_n)$ definieren.
- Es gilt aber der **Hilfssatz:**

Wenn die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ absolut konvergiert, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 1$, für $n > N$ und es gilt

a) $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} Log(1+a_n)$ konvergiert absolut.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} (1+a_\nu) = (1+a_1)...(1+a_N)\, exp \left(\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} Log(1+a_n) \right) =: \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1+a_\nu) =: \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$

- Also definiert man: Das unendliche Produkt $(1+a_1)(1+a_2)...$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $a_1 + a_2 + ...$ absolut konvergiert.
- Nach a) muß also notwendig gelten: $b_n \to 1,\ (n \to \infty)$.
- Das Produkt $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ ist also *nicht* konvergent in diesem Sinne.
- Der Wert eines absoluten Produkts $(1+a_1)(1+a_2)...$ ist genau dann von Null verschieden, wenn alle Faktoren von Null verschieden sind. Die Rückrichtung ist klar, für die Hinrichtung gilt: $\nexists k\ :\ (1+a_k) = 0$, $1 \leq k \leq N$. Da der Grenzwert in b) unabhängig von N ist, existiert inbesondere kein $m \in \mathbb{N}$, für das $(1+a_m) = 0$ wäre. Also sind alle Faktoren von Null verschieden.
- Eine normal konvergente Reihe $f_1 + f_2 + ...$ von analytischen Funktionen definiert eine analytische Funktion, nämlich das unendliche Produkt $(1+f_1)(1+f_2)...$.
- **Satz (Gaußsche Produktentwicklung):** Die Funktion

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = G(z) \ \text{ ist ganz.}$$

Die Funktion $G(z) := \lim\limits_{n\to\infty} G_n(z) := \lim\limits_{n\to\infty} z\,n^{-z} \prod\limits_{\nu=1}^{n} (1 + \frac{z}{\nu}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{-z}}{n!} z(z+1)...(z+n)$ ist in ganz $\mathbb{C}$ analytisch und hat Nullstellen 1. Ordnung genau in der Menge $\{0, -1, -2, ...\}$.

- **Folgerung:** Die Γ-Funktion hat keine Nullstellen.
- **Beweis:** Zu zeigen ist, daß $\frac{1}{G}$ die charakterisierenden Eigenschaften der Γ-Funktion hat:

  1. Beschränktheit von $\frac{1}{G}$ auf dem Vertikalstreifen $1 \leq x < 2$.
  2. Funktionalgleichung: $\frac{1}{G(z+1)} = \frac{z}{G(z)}$.
  3. Normierung: $G(1) = 1$

- Erst die Normierung auf 1 macht eine Funktion, welche die Charakterisierung der Γ-Funktion erfüllt, zur Γ-Funktion selbst.
- Die Funktion $f(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ ist bis auf das Vorzeichen periodisch, $f(z+1) = -f(z)$, und hat Pole 1. Ordnung in ganz $\mathbb{Z}$. Das gleiche gilt für $\frac{\pi}{\sin \pi z}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt sogar der
- **Ergänzungssatz:** $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$
- **Beweis (Skizze):** $f(z) := \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z}$ hat hebbare Singularitäten in $z \in \mathbb{Z}$ ist im Vertikalstreifen $1 \leq x < 2$ beschränkt, wegen der Periodizität von f also in ganz $\mathbb{C}$ und nach dem Satz von Liouville konstant. Wegen $f(z) = -f(-z)$ folgt $f \equiv 0$.
- Damit gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Die formale Möglichkeit $-\sqrt{\pi}$ fällt weg, weil $\Gamma(z) > 0$, für $z \in \mathbb{R}$) und es folgt die Produktentwicklung des Sinus: $\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$.
- Wegen $\cot z = \frac{\sin' z}{\sin z}$ erhält man so die Partialbruchzerlegung des Cotangens.
- Die klassische **Stirlingsche Formel** ist

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n \, e^{-n}} \leq e^{\frac{1}{12n}}$$

- Die (verallgemeinerte) Stirlingsche Formel erhält man über die Konstruktion einer analytischen Funktion $h(z)$, für welche dann gilt $\Gamma(z) = a\, h(z)$, $a \in \mathbb{C}$. Es ist $h(z) = g(z)\, e^{H(z)}$, mit einer Reihe $H(z)$. Für $z \in \mathbb{C}_-$ erhält man dann die verallgemeinerte Stirlingsche Formel:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z} e^{H(z)}$$

Mit den Eigenschaften von $H(z)$ und $n! = n\Gamma(n)$ ergibt sich wieder die klassische Stirlingsche Formel $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \, e^{-n} \leq e^{\frac{\theta(n)}{12n}}$, mit einer Funktion $0 < \theta(n) < 1$.

- Für $Im\, z \to \infty$ geht die Γ-Funktion exponentiell gegen Null: $Re\, z = 0 \Longrightarrow z^z = e^{z\, Log\, z} = e^{iy\, log|y|} \underbrace{e^{-y\frac{\pi}{2}}}_{\longrightarrow 0}$.

Widerspruch zur Definition über das Euler-Integral?

2.15 Weierstraßprodukte

- Mit Hilfe von Weierstraßprodukten kann man Funktionen konstruieren die folgende Eigenschaften besitzen:
- **Weierstraßscher Produktsatz (1.Form), (Weierstraß, 1876):**

Zu jeder in $D \subset \mathbb{C}$ diskreten Menge $S \subset D$, deren Elementen $s \in S$ eine Zahl $m_s \in \mathbb{N}$ zugeordnet ist, existiert eine analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, so daß gilt:

$f(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in S$ und $ord(f; s) = m_s$, $s \in S$.

- Ist S endlich, so wird das Problem durch $\prod_{s\in S}(z-s)^{m_s}$ gelöst.
- Sei $0\notin S$. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})^{m_n}$ konvergiert nur manchmal, aber es existiert ein Polynom $P_n(z)$, so daß $f(z):=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})^{m_n}e^{P_n(z)}$ sogar normal konvergiert.
- $f(z)$ ist also eine Lösung der vorgegebenen *Nullstellenverteilung* $\{(s,m_s)\mid s\in S\}$.
- Für eine beliebige ganze Funktion $h(z)$ ist natürlich auch $F(z)=exp(h(z))\,f(z)$ Lösung der Nullstellenverteilung.
- **Satz:** Jede in ganz $\mathbb{C}$ meromorpe Funktion ist als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellbar. Mit anderen Worten: Der Körper $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ der in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen ist der Quotientenkörper des Intergritätsbereichs $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen.
- Es gilt $P_n(z)=\sum_{\nu=1}^{k_n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{s_n}\right)^{\nu}$ (für jedes n existiert ein geeignetes k_n).
- **Hilfssatz:** Es existiert immer eine Folge (k_n), so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}m_n\left|\frac{z}{s_n}\right|^{k_n+1}$ für alle $z\in\mathbb{C}$ konvergiert. Die Bestimmung der Folge (k_n) ist entscheidend.
- Definiert man die Weierstraßschen Elementarfaktoren $E_{k_n}(z):=(1-z)\,exp\left(\sum_{\nu=1}^{k_n}\frac{1}{\nu}z^{\nu}\right)$, so schreibt sich das unendliche Produkt als

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})^{m_n}e^{P_n(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[E_{k_n}\left(\frac{z}{s_n}\right)\right]^{m_n}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})^{m_n}\,exp\left(\sum_{\nu=1}^{k_n}m_n\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{s_n}\right)^{\nu}\right)$$

- Für dieses sogenannte Weierstraßprodukt (das in $\mathbb{C}$ normal konvergiert) gilt der
- **Satz:** f ist in ganz $\mathbb{C}$ analytisch und die Nullstellen von f sind genau die Punkte $s_1,s_2,s_3,...$ mit den vorgeschriebenen Ordnungen.
- Die Funktion $z^{m_0}f(z)$ hat eine zusätzliche Nullstelle der Ordnung m_0 im Nullpunkt.
- Die Polynome $P_n(z)$ des letzten Satzes haben genügend kleinen Grad.
- Beispiele:

1. Gesucht ist eine ganze Funktion f mit Nullstellen genau in n^2, $n\in\mathbb{Z}$, mit Ordnung 1.
   Da $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n^2}\right|$ für alle $z\in\mathbb{C}$ konvergiert, gilt also $k_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, also konvergiert auch $f(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{n^2})$ mit der gewünschten Nullstellenverteilung.
2. Die Funktion $f(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})e^{\frac{z}{s_n}}$ ist ganz und hat genau die Nullstellen $s_n\in\mathbb{Z}$ mit Ordnung 1, denn $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{s_n}\right|^2$ konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$ (damit gilt $k_n=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$).
3. **Definition:** Sind $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, so nennt man $L:=L(\omega_1,\omega_2):=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ das von ω_1,ω_2 aufgespannte Gitter.
   Gesucht ist eine ganze Funktion σ, die genau in allen Gitterpunkten Nullstellen der Ordnung 1 besitzt.
   Da $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{s_n}\right|^3$ für alle $z\in\mathbb{C}$ konvergiert, findet man

$$\sigma(z):=\sigma(z;L):=z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{s_n})exp\left(\frac{z}{s_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{s_n}\right)^2\right)$$

   mit den gewünschten Eigenschaften.

Wegen der absoluten Konvergenz des unendlichen Produkts ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig. Man kann also auch schreiben:

$$\sigma(z;L) := z\prod_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}(1-\frac{z}{\omega})exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

- **Definition:** $\sigma(z;L)$ heißt Weierstraßsche σ-Funktion zum Gitter L.
- **Definition:** Die logarithmische Ableitung $\zeta(z) := \frac{d}{dz}Log(\sigma(z)) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ heißt Weierstraßsche ζ-Funktion (zum Gitter L).
- **Definition:** $\wp(z;L) := -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\limits_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$ nennt man die Weierstraßsche $\wp$-Funktion (zum Gitter L).
- $\wp$ ist periodisch bzgl. dem Gitter L und meromorph, also elliptisch. $\wp$ ist gerade, $\wp'$ ungerade.
- Sucht man eine meromorphe Funktion (über eine Mittag-Lefflersche Partialbruchreihe), die in den Gitterpunkten des Gitters L die Hauptteile $h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) = \frac{1}{(z-s_n)^2}$ hat, so erhält man die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zum Gitter L.

2.16 Der Partialbruchsatz von Mittag-Leffler

- Ersetzt man beim Weierstraßschen Produktsatz f durch $\frac{1}{f}$, so erhält man eine Funktion mit vorgegebener Polstellenverteilung S und entsprechenden Polordnungen m_s. Es gilt aber sogar allgemeiner:
- **Partialbruchsatz von Mittag-Leffler (Mittag-Leffler, 1877):**

Sei S diskret in $\mathbb{C}$ und sei jedem $s\in S$ eine ganze Funktion $\begin{array}{rccc} h_s: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \tilde{z} & \longmapsto & h_s(\tilde{z}) \end{array}$ (mit $h_s(0)=0$ für die Eindeutigkeit) zugeordnet.

Dann existiert eine analytische Funktion $f:\mathbb{C}\setminus S\longrightarrow\mathbb{C}$, deren Hauptteil in $s\in S$ durch h_s gegeben ist.

- Also hat $f(z)-h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$, $s\in S$, in $z=s$ eine hebbare Singularität.
- h_s ist auf $U_{\frac{1}{|z|}}(0)$ analytisch, nämlich eine Potenzreihe in $\tilde{z}=\frac{1}{z}$. Mit $U_{\frac{1}{|z|}}(0)\longrightarrow\mathbb{C}$ $(|z|\to 0)$ ist h_s ganz.
- Ist S endlich, so löst $f(z)=\sum\limits_{s\in S}h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$ das Problem. Sei S also unendlich.
- Die entsprechende *Reihe* konvergiert aber i.A. nicht. Man kann aber konvergenzerzwingende Summanden einführen. Dazu ordnet man die s_n nach wachsenden Beträgen. Jede Funktion $z\longmapsto h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)$ ist analytisch für $|z|<|s_n|$ ($h_n=h_n(\tilde{z})$ soll ganz sein, für $\tilde{z}$ darf man also alle Punkte aus $\mathbb{C}$ einsetzen, aber eben nicht ∞. Man darf $\frac{1}{z-s_n}$ also nur einsetzen, falls $z\neq s_n$, also z.B., wenn $|z|<|s_n|$.) und dort in eine Potenzreihe entwickelbar, die man abbricht und ein Polynom P_n erhält. Hat man die Entwicklung für jedes h_n durchgeführt, so erhält man Polynome mit folgender Eigenschaft:

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)-P_n(z)\right] \qquad (\star)$$

konvergiert normal *in der Kreisscheibe* $|z|<|s_n|$.

Dazu bestimmt man P_n beispielsweise so, daß $\left|h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)-P_n(z)\right|\leq\frac{1}{n^2}$, für $|z|<|s_n|$.

- Da S unendlich und diskret in $\mathbb{C}$ ist, kann S keinen HP in $\mathbb{C}$ haben, muß also unbeschränkt sein. Also existiert immer ein s_N, so daß $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)-P_n(z)\right]$ für $|z|<|s_N|$ normal konvergiert. Darüberhinaus existiert kein $z \in \mathbb{C}$, für das nicht ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $(\star)$ existiert $\Longleftrightarrow \forall\, z \in \mathbb{C}\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $(\star)$.

Natürlich ist $\sum\limits_{n=1}^{N-1} \left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right]$ eine endliche Summe, also konvergent.

Insgesamt ergibt sich also: $\forall\, z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

eine in $\mathbb{C} \setminus S$ analytische Funktion mit dem gewünschten singulären Verhalten: f ist eine Lösung der gegebenen Hauptteilverteilung.

- **Definition:** Eine auf obige Weise gewonnene Reihe heißt Mittag-Lefflersche Partialbruchreihe.
- Zwei Lösungen f_0, f einer gegebenen Hauptteilverteilung unterscheiden sich nur durch eine ganze Funktion g, denn die Hauptteile von f_0 und f sind gleich und $f_0 - f =: g$ ist ganz (Die Differenz der Nebenteile ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch: f ist nach Voraussetzung analytisch auf $\mathbb{C} \setminus S$. Die kritischen Stellen werden abgezogen und die Fortsetzung $\tilde{f}$ ist dann analytisch auf ganz $\mathbb{C}$). Unter Umständen läßt sich aber nicht jede ganze Funktion durch eine solche Differenz erhalten. Da die Addition einer beliebigen ganzen Funktion zu f_0 nichts an der Hauptteilverteilung von f_0 ändert, gilt dies aber doch.

$f_0 = f + g$, mit einer beliebigen ganzen Funktion g ist also die allgemeine Lösung der Hauptteilverteilung.

- Beispielsweise hat die Γ-Funktion die Polstellenmenge $S = \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ mit Polen 1. Ordnung und Residuen $Res(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. Also lauten die Hauptteile $h_n\left(\frac{1}{z+n}\right) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$.

Eigentlich müßte man alle h_n in Potenzreihen entwickeln, um geeignete Polynome P_n zu erhalten. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ konvergiert aber auch schon ohne zusätzliche Summanden.

Daher ist $g(z) := \Gamma(z) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ ganz.

- Man kann zeigen, daß die Γ-Funktion folgende Zerlegung besitzt:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

2.17 Der kleine Riemannsche Abbildungssatz

- **Definition:** Eine Abildung $\varphi : D \longrightarrow D'$ heißt (im Großen) konform, falls

  a) φ bijektiv

  b) φ analytisch

  c) φ^{-1} analytisch

- Z.B. $exp : \overset{\circ}{S} \longrightarrow \mathbb{C}_-$ (Log muß auch analytisch sein, deshalb $\overset{\circ}{S} \longrightarrow \mathbb{C}_-$).
- Anstelle von c) kann man auch fordern, daß φ' nirgends verschwindet. Daraus folgt dann nämlich aus a) und über den Satz für implizite Funktionen, daß φ^{-1} analytisch ist. Umgekehrt gilt $\varphi'^{-1}(\varphi(z)) = \frac{1}{\varphi'(z)} \neq 0$, wenn φ^{-1} analytisch und bijektiv ist.
- c) folgt auch schon aus a) und b).
- **Definition:** Zwei Gebiete D, D' heißen konform äquivalent, falls eine konforme Abbildung $\varphi : D \longrightarrow D'$ existiert.

- Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Teilgebiete von $\mathbb{C}$.
- Nach (8) gilt: Jedes mit einem Elementargebiet konform äquivalente Gebiet ist selbst ein Elementargebiet.
- Die beiden Elementargebiete $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind nicht konform äquivalent, da jede ganze Funktion $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}$ (φ ist beschränkt) nach dem Satz von Liouville konstant ist.
- $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind aber topologisch äquivalent (homöomorph), z.B. über

$$\varphi : z \longmapsto \frac{z}{1+|z|} \, , \, \varphi^{-1} : w \longmapsto \frac{w}{1-|w|}$$

- Die (notwendige) topologische Äquivalenz zweier Gebiete ist also nicht hinreichend für die konforme Äquivalenz.
- Wir beschränken uns hier auf Elementargebiete. Die (einzigen verschiedenen) Äquivalenzklassen werden hier durch $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ repräsentiert. Dies ist die Aussage des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes
- Als Verallgemeinerung von (14) ist die Menge der (im Großen) konformen Selbstabbildungen eines Gebietes D bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen die Gruppe der Automorphismen $Aut(D)$. Durch Bestimmung dieser Gruppe weiß man also, auf wieviele Weisen sich zwei Gebiete einer Klasse konform aufeinander abbilden lassen.
- **Kleiner Riemannscher Abbildungssatz (Riemann, 1851):**

Jedes von der komplexen Ebene verschiedene nichtleere Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist zur Einheitskreisscheibe konform äquivalent.

- **Beweis:**
- Schritt 1: Zu jedem nichtleeren Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, existiert ein konform äquivalentes Gebiet $D_1 \subset \mathbb{C}$, so daß im Komplement $\mathbb{C} \setminus D_1$ eine volle Kreisscheibe enthalten ist.

> Es existiert ein $b \in \mathbb{C}$, $b \notin D$, so daß die Funktion $f(z) = z - b$ eine analytische Quadratwurzel g hat. Nun ist g injektiv und bildet dann natürlich konform auf das (Elementar-)Gebiet $D_1 := g(D)$ ab. Da auch aus $g(z_1) = -g(z_2)$ folgt $z_1 = z_2$, gilt:
> Ist $0 \neq w \in D_1$, dann ist $-w \notin D_1$. Da D_1 offen und nichtleer ist, liegt also eine am Nullpunkt gespiegelte Kreisscheibe im Komplement von D_1. Es ist sogar im Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ eine volle Kreischeibe $U_r(a)$ enthalten, da man Schritt 1 auch auf das nichtleere Elementargebiet D_1 anwenden kann (die konforme Abbildung g^{-1} hat man ja schon).

- Schritt 2: Zu jedem nichtleeren Elementargebiet $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$, existiert ein konform äquivalentes Gebiet D_2, mit $0 \in D_2 \subset \mathbb{E}$.

> Die Abbildung $z \longmapsto \frac{1}{z-a}$ bildet D konform auf ein beschränktes Gebiet ab. Durch geeignete Transformationen $z \longmapsto z + \alpha$ und $z \longmapsto \rho z$ ($\rho > 0$) erhält man ein konform äquivalentes Gebiet, welches in $\mathbb{E}$ enthalten ist. (Dieses Gebiet ist noch nicht ganz $\mathbb{E}$, die entsprechende Abbildung also noch nicht bijektiv zwischen D und $\mathbb{E}$.)

• Schritt 3: **Hilfssatz:** Sei D ein Elementargebiet mit $0 \in D \subset \mathbb{E}$. Wenn D in $\mathbb{E}$ echt enthalten ist, so existiert eine injektive analytische Funktion $\psi : D \longrightarrow \mathbb{E}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \psi(0) = 0 \text{ und} \\ &\text{b)} \quad |\psi'(0)| > 1 \end{aligned} \tag{18}$$

Nach dem Schwarzschen Lemma (12) gilt dies nicht für $D = \mathbb{E}$.

Beweis: Nach (13) ist $h(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ eine konforme Selbstabbildung von $\mathbb{E}$. $h(z)$ besitzt eine analytische Quadratwurzel $H(z)$. Sowohl $H(z)$ als auch die Funktion $\psi(z) := \tilde{\psi}(H(z)) := \frac{H(z)-H(0)}{\overline{H(0)}H(z)-1}$ bilden D injektiv auf $\mathbb{E}$ ab.
$\psi'(0)$ erhält man über $\frac{d}{dz}H^2(z)$ und $|H(0)|^2 = |a|$.

Folgerung: Existiert unter allen injektiven analytischen Abbildungen $\varphi : D \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $0 \in D$ eine mit maximalem $|\varphi'(0)|$, dann ist φ surjektiv, also D und $\mathbb{E}$ konform äquivalent.

Durch Widerspruchsbeweis mit (18), angewendet auf das Elementargebiet $\varphi(D) \neq \mathbb{E}$.

Damit ist der kleine Riemannsche Abbildungssatz auf ein Extremalproblem zurückgeführt.
• Schritt 4:
a) Sei nun D beschränktes Gebiet (nicht notwendigerweise ein Elementargebiet), mit $0 \in D$.
b) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller injektiven analytischen Funktionen $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $M := sup\{|\varphi'(0)|\,,\ \varphi \in \mathcal{M}\} \leq \infty$.
c) Sei (φ_n) eine Folge aus $\mathcal{M}$ mit $|\varphi_n'(0)| \to M$ $(n \to \infty)$.
Falls

1) (φ_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt,

2) der Limes φ injektiv ist und

3) $\varphi(D) \subset \mathbb{E}$ ist,

dann ist φ eine injektive analytische Funktion mit $|\varphi'(0)| = M < \infty$ (es existiert eine Funktion $\psi \in \mathcal{M}$ mit $|\psi'(0)| > 1$, deshalb muß $M > 0$ sein) und der kleine Riemannsche Abbildungssatz ist bewiesen.
• Schritt 5: (φ_n) besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.
Dazu zeigt man, daß die beschränkten analytischen Funktionen gleichgradig stetig sind. Das entsprechende δ wird im Beweis des Hilfssatzes verwendet, nach dem eine Folge, die auf einer dichten Teilmenge $S \subset D$ punktweise konvergiert, sogar auf ganz D lokal gleichmäßig konvergiert. Dies benutzt man beim Satz von Montel, der die Existenz einer solchen Folge sicherstellt.

Hilfssatz: Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset D$ ein Kompaktum und $C > 0$.
Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(D, K, C, \epsilon)$ (das gleiche δ, für *alle* beschränkten Funktionen) mit folgender Eigenschaft:
Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch mit $|f(z)| < C\,,\ \forall\, z \in D$, so gilt $\forall\, z, a \in K$:

$$|z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon$$

D.h., die Menge $\mathcal{F}$ der beschränkten analytischen Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gleichgradig stetig in K.

Beweis: sei K zunächst eine kompakte Kreisscheibe $\bar{U}_r(z_0) \subset D$, so daß $\bar{U}_{2r}(z_0) \subset D$.

Über die Cauchysche Integralformel konstruiert man ein geeignetes δ, indem man die Abschätzung $|f(z) - f(a)| \leq \frac{2C}{r}|z-a|$ herleitet.

Über den Satz von Heine-Borel erhält man für beliebige Kompakta $K \subset D$: $\forall\, a \in K\ \exists\, U_r(a) \subset D$ (mit gleichem r), wobei auch noch $\bar{U}_{2r}(a) \subset D$.

- **Definition:** Ist a ein beliebiger Punkt aus dem Kompaktum $K \subset D$ und ist die volle Kreisscheibe $U_r(a)$ ganz in D enthalten, so nennt man r eine Lebesguesche Zahl.

Hilfssatz: Sei $f_1, f_2, f_3, ... : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von analytischen Funktionen mit $|f_n(z)| \leq C$. Wenn diese Folge auf einer in D dichten Teilmenge S punktweise konvergiert, dann konvergiert sie sogar lokal gleichmäßig und zwar in ganz D.

Beweis: Man zeigt, daß (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Cauchyfolge ist (jede lokal gleichmäßig konvergente Cauchyfolge konvergiert lokal gleichmäßig). Zu $\epsilon > 0$ wählt man das δ aus obigem Hilfssatz. Nach Heine-Borel existieren endlich viele Punkte $a_j \in S$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} U_\delta(a_j)$. Da man nur die **lokal** gleichmäßige Konvergenz benötigt, genügt es, für K abgeschlossene Kreisscheiben zu nehmen. Sei nun $z \in K$, dann existiert ein a_j mit $|z - a_j| < \delta$. Dann folgt (für alle $z \in U_\delta(a_j)$):

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_n(z)| < 3\epsilon$$

Der mittlere Term wird ab einem gewissen N auch kleiner als ϵ, da die Folge (f_n) punktweise konvergiert.

Satz von Montel (Montel, 1912): Sei $f_1, f_2, f_3, ... : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von analytischen Funktionen mit $|f_n(z)| \leq C$.

Dann existiert eine Teilfolge $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, ...$, welche lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Sei $S = \{s_1, s_2, ...\} \subset D$ abzählbar und dicht in D (z.B. $S = \{\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$). Über den Satz von Bolzano-Weierstraß (gilt für Zahlenfolgen, also $f_1(s_1), f_2(s_1), ...$) erhält man induktiv eine Diagonalfolge $f_{11}, f_{22}, ...$ der beschränkten Folge (f_n), welche für alle $s \in S$ konvergiert (punktweise). Aus obigem Hilfssatz folgt die Behauptung.

Damit existiert eine Teilfolge von (φ_n), die lokal gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion φ ist damit analytisch.

- Schritt 6: φ ist injektiv.

Aus der Folgerung des Satzes von Hurwitz erhält man: φ ist entweder konstant oder injektiv. $|\varphi'(0)|$ kann nach Konstruktion nicht kleiner sein als $|\psi'(0)|$ für irgendein $\psi \in \mathcal{M}$. Damit ist auch $|\varphi'(0)| > 0$, also φ nicht konstant.

- Schritt 7: $\varphi(D) \subset \mathbb{E}$

Da φ lediglich Grenzfunktion der Folge (φ_n) ist, könnte φ auch Werte auf dem Rand von $\mathbb{E}$ annehmen. Dann hätte φ aber ein lokales Betragsmaximum, nämlich 1, wäre nach dem Maximumprinzip also konstant.

• Zur Konstruktion von $\varphi : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{E}$ verwendet man die analytische Quadratwurzel von z, um auf die rechte Halbebene zu kommen. Diese wird durch Multiplikation mit i auf die obere Halbebene abgebildet und diese dann durch $\frac{z-i}{z+i}$ auf $\mathbb{E}$.

• In der Elekrtrostatik stehen die Feldlinien senkrecht auf den Äquipotentiallinien. Mit einer konformen Abbildung und über den kleinen Riemannschen Abbildungssatz kann man etwa das Feld eines Dipols in einer Halbebene auf ein drehsymmetrisches Feld (in $\mathbb{E}$) zurückführen. Die Feldlinien schneiden die Äquipotentiallinien dann immer noch senkrecht.

2.18 Die Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes

• **Hilfssatz:** Sei $\alpha : [a,b] \longrightarrow D$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, eine stetige Kurve. Dann existieren eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ und ein $r > 0$ mit $U_r(\alpha(a_\nu)) \subset D$ und

$$\alpha([a_\nu, a_{\nu+1}]) \subset U_r(\alpha(a_\nu)) \cap U_r(\alpha(a_{\nu+1})) \subset D \text{ für } 0 \leq \nu < n \tag{19}$$

• **Beweis:** $Bild(\alpha)$ ist kompakt. Aus der Existenz einer Lebesgueschen Zahl r folgt: $\forall\, x \in Bild(\alpha)\ U_r(x) \subset D \Longrightarrow U_r(\alpha(a_\nu)) \cap U_r(\alpha(a_{\nu+1})) \subset D$. Die Unterteilung der Kurve wählt man so, daß der nächste Stützpunkt $\alpha(a_{\nu+1})$ auch noch in $U_r(\alpha(a_\nu))$ liegt.

• Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch, dann hängt

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\alpha(a_\nu)}^{\alpha(a_{\nu+1})} f(\zeta)\, d\zeta \tag{20}$$

nicht von der Wahl der Unterteilung ab. Wenn α stückweise glatt ist, stimmt (20) mit dem Kurvenintegral $\int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta$ überein.

• Ist α nur stetig, so wird das Kurvenintegral über (20) definiert.

• Man betrachtet nun stetige Abbildungen $H : Q \longrightarrow D$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, des Quadrats $Q = [0,1] \times [0,1]$. Das Bild von ∂Q kann man als geschlossene Kurve ansehen.

• **Satz:** Sei $H : Q \longrightarrow D$ stetig und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt

$$\int\limits_{H|_{\partial Q}} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{21}$$

Beweis: Man zerlegt Q in ein Netz aus Quadraten. Diese müssen klein genug sein, damit sie noch von einer Kreischeibe überdeckt werden, die ganz in D liegt. Nach (19) ersetzt man $H|_{\partial Q}$ durch eine entsprechende stückweise glatte Kurve und verwendet den Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete: $\Longrightarrow \int\limits_{H|_{\partial Q}} f(\zeta)\, d\zeta = 0$

• **Definition:** Zwei Kurven $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow D$, $D \subset \mathbb{C}$ offen, heißen homotop in D (bei festen Endpunkten), falls eine stetige Abbildung – eine sogenannte Homotopie – $H : Q \longrightarrow D$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

a) $\alpha(t) = H(t, 0)$

b) $\beta(t) = H(t, 1)$

c) $\alpha(0) = \beta(0) = H(0, s)$ und $\alpha(1) = \beta(1) = H(1, s)$, für $0 \leq s \leq 1$.

• Wenn s das Intervall $[0, 1]$ durchläuft, dann wird α über $\alpha_s(t) := H(t, s)$ in β deformiert (bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt).

• In einem konvexen Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ sind je zwei Kurven α, β mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop, denn für jedes t kann man $H(t, s) := \alpha(t) + s\,(\beta(t) - \alpha(t))$ betrachten.

• **Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes:**

Sind α, β homotop in D, dann gilt für jede analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C} : \int_\alpha f = \int_\beta f$.

• **Beweis:** Sei $H : Q \longrightarrow D$ eine Homotopie zwischen α und β, dann gilt nach Satz (21):

$$0 = \int\limits_{H|_{\partial Q}} f(\zeta)\, d\zeta = \int_\alpha f + \int_{\beta^-} f$$

• **Definition:** Eine in D geschlossene Kurve $\alpha : [0, 1] \longrightarrow D$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = z_0$ heißt nullhomotop in D, falls α zur konstanten Kurve $\beta(t) = z_0$ homotop ist.

• **Definition:** Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve in D nullhomotop ist.

• Anschaulich kann man D auf einen Punkt zusammenziehen.

• **Satz:**

$$\text{Ein Gebiet } D \subset \mathbb{C} \text{ ist genau dann ein Elementargebiet, wenn } D \text{ einfach zusammenhängend ist.} \tag{22}$$

• **Beweis:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Sei D Elementargebiet. Zu zeigen ist, daß jede geschlossene Kurve in D nullhomotop ist.
$D = \mathbb{C}$ ist konvex, also einfach zusammenhängend.
Ist $D \neq \mathbb{C}$, so ist D konform äquivalent zu $\mathbb{E}$, insbesondere also topologisch äquivalent über einen Homöomorphismus $\varphi : D \longrightarrow D' = \mathbb{E}$. Ist H eine Homotopie in D, dann ist $H' = \varphi \circ H$ eine Homotopie in D' und umgekehrt $\varphi^{-1} \circ H' = H$ eine Homotopie in D. D ist also genau dann einfach zusammenhängend, wenn D' einfach zusammenhängend ist. Aber $\mathbb{E}$ ist einfach zusammenhängend.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $\alpha : [0, 1] \longrightarrow D$ geschlossen, also in der einfach zusammenhängenden Menge D nullhomotop, so gilt mit der Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes: $\int_\alpha f = 0$, für jede analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, weil z_0 Integrationsmaß Null hat.
Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist also ein Elementargebiet.

• Da $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ topologisch äquivalent sind, erhält man einen tiefliegenden Satz der Topologie der Ebene:

• **Satz:** Je zwei einfach zusammenhängende Gebiete sind topologisch äquivalent.

• **Beweis:** Es existieren zwei topologische Abbildungen φ, ψ mit:

$$\mathbb{C} \neq D \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathbb{E} \underset{\psi^{-1}}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}$$

• **Satz:** Jede geschlossene Kurve α mit Umlaufzahl k in dem Gebiet $\mathbb{C}^\bullet$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$ ist zur k-fach durchlaufenen Einheitskreislinie homotop.

- **Beweis:** Über die topologische Abbildung exp und die Existenz einer Kurve $\tilde{\alpha}$ mit $\exp\tilde{\alpha} = \alpha$: Es existiert eine Homotopie zwischen $\tilde{\alpha}$ und der Strecke σ von 0 nach $2\pi ik$.
- **Folgerung:** Die Umlaufzahl $\chi(\alpha;0)\,(=k)$ aus (15) ist stets ganz.

2.19 Eine Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes

- **Definition:** Eine geschlossene Kurve α in einem Gebiet D heißt nullhomolog in D, falls ihr Inneres $Int(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus Bild(\alpha) \mid \chi(\alpha;z) \neq 0\}$ ganz in D enthalten ist. ($\Longrightarrow$ Punkte des Komplements werden nicht umlaufen.)
- Jede in D nullhomotope Kurve ist auch nullhomolog in D. Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel).
- **Beweis:** Für $D = \mathbb{C}$ ist das klar. Ist $a \in \mathbb{C} \setminus D$, so ist $f(z) = \frac{1}{z-a}$ analytisch in D und das Integral über α verschwindet, weil α nullhomotop ist.
- **Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes:**

Sei α geschlossene Kurve in $D \subset \mathbb{C}$, [2] dann gilt die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} &\alpha \text{ ist nullhomolog in } D \\ &\Longleftrightarrow \\ \oint_\alpha f = 0 \text{ , für jede analytische Funktion } &f : D \longrightarrow \mathbb{C}\ ^3 \end{aligned} \tag{23}$$

- **Zusatz:** Für alle $z \in D \setminus Bild(\alpha)$ gilt die allgemeine Cauchysche Integralformel[4]

$$f(z)\chi(\alpha;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

- **Beweis:** Die Rückrichtung ist klar: Für $a \in \mathbb{C}\setminus D$ ist $f(z) := \frac{1}{z-a}$ analytisch in D, also $\chi(\alpha;a) = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{C} \setminus D \Longrightarrow$ Das Innere von α muß in D liegen.

Für die Hinrichtung wird erst die allgemeine Cauchysche Integralformel bewiesen. Diese ist wegen der Definition der Umlaufzahl $\chi(\alpha;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{1}{\zeta - z}d\zeta$ äquivalent mit

$$0 = \oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta \qquad , \text{ für } z \in D \setminus Bild(\alpha)$$

Man zeigt nacheinander:

1) Die durch $\varphi : D \times D \longrightarrow \mathbb{C},\ (\zeta, z) \longmapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \zeta \neq z \\ f'(z) & , \zeta = z \end{cases}$ definierte Funktion ist stetig und bei festem ζ analytisch in z.

[2] α verläuft in einer Teilmenge von D. Diese Teilmenge muß nur eine Zusammenhangskomponente von D sein.

[4] Gilt der allgemeine Cauchysche Integralsatz (er gilt für *alle* geschlossenen Kurven und *eine* analytsche Funktion) und ist D ein Elementargebiet, so gilt die Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes für alle geschlossenen Kurven und - weil D Elementargebiet ist - auch für jede analytische Funktion. Dann sind also alle Kurven in D nullhomolog.
Im Beweis des Zusatzes wird nur verwendet, daß α nullhomolog ist. Wenn D Elementargebiet wäre, so würde der Zusatz also schon aus dem allgemeinen Cauchyschen Integralsatz und der Homologieversion folgen.

2) Nach der Leibnizschen Regel folgt:

$$G(z) := \oint_\alpha \varphi(\zeta, z)\, d\zeta \qquad \text{ist analytisch in } D$$

3) Es existiert eine ganze Funktion $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, mit $F_{|_D} = G$.
Man zeigt wieder über die Leibnizsche Regel, daß eine analytische Funktion $H(z) = \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ existiert, für die gilt: $F(z) = \begin{cases} G(z) & , z \in D \\ H(z) & , z \in Ext(\alpha) \end{cases}$
Wegen $D \cup Ext(\alpha) = \mathbb{C}$ ist F die analytische Fortsetzung von G auf ganz $\mathbb{C}$ [5].

4) F ist die Nullfunktion.
Dazu ersetzt man α durch den Streckenzug aus (19) (weil nur so das Integral überhaupt definiert ist) und erhält über eine Integralabschätzung die Beschränktheit von F. Wegen des Satzes von Liouville und $\lim\limits_{|z| \to \infty} |F(z)| = 0$ ist $F \equiv 0$.

5) Da $F \equiv 0$, ist auch $G(z) = \oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0$, für $z \in D \setminus Bild(\alpha)$. Setzt man die Definition der Umlaufzahl wieder ein, so erhält man die allgemeine Cauchysche Integralformel.

Eigentlicher Beweis:
Sei nun $a \in D \setminus Bild(\alpha)$. Wertet man die allgemeine Cauchysche Integralformel für $g(z) := (z - a) f(z)$ an der Stelle a aus, so folgt $\int_\alpha f = 0$ und die Hinrichtung ist bewiesen.

- **Definition:** Zwei geschlossene Kurven $\alpha, \beta \subset D$ heißen homolog, falls $\chi(\alpha; a) = \chi(\beta; a)\,, \forall\, a \in \mathbb{C} \setminus D$.
- Aus der Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes folgt sofort: Für zwei geschlossene homologe Kurven α, β in einem Gebiet D gilt für jede analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C} : \int_\alpha f = \int_\beta f$.
- Es ist beliebig, ob man ein Gebiet oder eine offene Teilmenge betrachtet, wenn die beteiligte Funktion stetig ist, denn genau die zusammenhängenden Mengen werden unter stetigen Funktionen auf zusammenhängende Mengen abgebildet.
- Mit der Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes erhält man eine Verallgemeinerung des Residuensatzes in folgendem Sinne:

1) α ist nur stetig (anstatt stückweise glatt)

2) D ist nur offen (anstatt ein Elementargebiet)

3) S kann diskret in D sein (anstatt endlich)

- **Verallgemeinerung des Residuensatzes:**

Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $S \subset D$ eine in D diskrete Menge. Sei $f : D \backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und α nullhomolog in $D \setminus S$. Dann gilt die Residuenformel:

$$\oint_\alpha f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{s \in S} Res(f; s) \chi(\alpha; s)$$

- **Beweis:** Wird auf den normalen Residuensatz zurückgeführt: 1) wird durch (19) ausgebügelt[6]. 2) wird also durch (23) ausgebügelt, weil die hier betrachtete Kurve α nullhomolog in D ist. 3) wird ausgebügelt,

[5]In $D \cup Ext(\alpha)$ geht ein, daß α nullhomolog ist.
[6]Von der Eigenschaft, daß D Elementargebiet ist, wird nur benötigt, daß $\oint_\alpha g = 0$, für jede analytische Funktion g.

weil $Int(\alpha) \cup Bild(\alpha)$ kompakt ist, also nur endlich viele $s \in S$ in $Int(\alpha)$ liegen.

2.20 Charakterisierungen von Elementargebieten

- **Satz:**

$$\text{Für ein } \textit{nichtleeres} \text{ Gebiet } D \subset \mathbb{C} \text{ sind folgende Eigenschaften äquivalent:} \tag{24}$$

Funktionentheoretische Charakterisierungen

1) D ist ein Elementargebiet.

2) In D gilt der allgemeine Cauchysche Integralsatz.

3) In D gilt die allgemeine Cauchysche Integralformel.

4) Jede nullstellenfreie analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt einen analytischen Logarithmus in D.

5) Jede nullstellenfreie analytische Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine analytische Quadratwurzel in D.

6) D ist entweder ganz $\mathbb{C}$ oder konform äquivalent zu $\mathbb{E}$.

Potentialtheoretische Charakterisierung

7) Jede in D harmonische Funktion ist Realteil einer in D analytischen Funktion.

Geometrische Charakterisierungen

8) D ist homotop einfach zusammenhängend.

9) D ist homolog einfach zusammenhängend.

10) D ist homöomorph zu $\mathbb{E}$.

11) Ist $\mathbb{C} \setminus D = K \cup A$, K kompakt, A abgeschlossen und $K \cap A = \emptyset$, so ist $K = \emptyset$.

- **Beweis:**

1) $\Longleftrightarrow$ 2) Satz (5).
2) $\Longrightarrow$ 3) Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes.
3) $\Longrightarrow$ 4) **???**
4) $\Longrightarrow$ 5) Satz (7).
5) $\Longrightarrow$ 6) Von der Eigenschaft des Elementargebiets wurde beim Beweis des keinen Riemannschen Abbildungssatzes nur 5) benutzt.
6) $\Longrightarrow$ 1) $\mathbb{E}$ und $\mathbb{C}$ sind Elementargebiete, und zu $\mathbb{E}$ konform äquivalente Gebiete sind auch Elementargebiete.

1) $\Longrightarrow$ 7) Satz (3).

7) $\Longrightarrow$ 4) $log|f|$ ist harmonisch (für eine beliebige nullstellenfrei analytische Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\bullet$) und Realteil einer analytischen Funktion F. Aber $F := Log\, f \;:\; \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ ist der gesuchte analytische Logarithmus von f.

1) $\Longleftrightarrow$ 8) Satz (22).

8) $\Longleftrightarrow$ 9) Homologieversion des Cauchyschen Integralsatzes. (Wichtig ist hier, daß über die Homologieversion nun eine Aussage über alle in D nullhomologen Kurven zugleich gemacht wird. Dann ist D nämlich ein Elementargebiet, also einfach zusammenhängend, also ist jede geschlossene Kurve in D nullhomotop.)

1) $\Longrightarrow$ 10) Kleiner Riemannscher Abbildungssatz. Außerdem sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ topologisch äquivalent.

10) $\Longrightarrow$ 8) Konstruktion einer Homotopie, die zu $\alpha(0)$ (null-)homotop ist, für eine beliebige Kurve α in D.

11) $\Longrightarrow$ 9) Sei α geschlossene Kurve in D, α liegt also in einer geeigneten (beschränkten) Kreisscheibe U. Man zeigt nun, daß $K := \{z \in \mathbb{C} \setminus D \mid \chi(\alpha; z) \neq 0\}$ kompakt und disjunkt von der abgeschlossenen Menge $A := \{z \in \mathbb{C} \setminus D \mid \chi(\alpha; z) = 0\}$ ist. Aus 11) folgt dann $K = \emptyset$, also $Int(\alpha) \subset D$.

9) $\Longrightarrow$ 11) Durch Widerspruchsbeweis: $\neg$ 11) $\Longrightarrow \neg$ 9).

Sei also $\mathbb{C} \setminus D = A \cup K$, aber $K \neq \emptyset$. Die Menge $U := D \cup K = \mathbb{C} \setminus A \equiv D \cup (\mathbb{C} \setminus A)$ ist offen.

Hilfssatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset U$ ein nichtleeres Kompaktum, dann ist $D := U \setminus K$ *nicht* einfach zusammenhängend.

- Damit ist Satz (24) vollständig bewiesen.

- **Beweis des Hilfssatzes:** (Er besagt anschaulich, daß einfach zusammenhängende Gebiete keine Löcher haben)

Zu zeigen ist die Existenz einer geschlossenen Kurve α in D, deren Inneres $Int(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus Bild(\alpha) \mid \chi(\alpha; z) \neq 0)\}$ nicht in D enthalten ist.

Die Idee ist, K mit Quadraten zu plastern und α aus Randkurven zusammenzusetzen.

Definition: Eine Jordankurve ist eine geschlossene Kurve, die außer Anfangs- und Endpunkt, keinen Doppelpunkt hat.

Jordanscher Kurvensatz: Inneres und Äußeres einer Jordankurve sind zusammenhängend. Das Innere ist sogar einfach zusammenhängend.

3 DGL's und dynamische Syteme

3.1 Integrierende Faktoren (Lemma von Frobenius)

- DGL's, in denen $\dot{x}$ linear auftritt, lassen sich auf folgende Gestalt bringen:

$$P(t,x) + Q(t,x)\frac{dx}{dt} = 0 \Longleftrightarrow P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx = 0 \tag{25}$$

Sei R (endliches oder unendliches) Rechteck in $\mathbb{R}$. Existiert eine Funktion F, mit $F(t,x) = C$ und auf R stetigen partiellen Ableitungen $F_t = P$, $F_x = Q$, so heißt (25) exakt und F heißt Stammfunktion von (25). Dann sind die Lösungen von (25) auf dem Intervall I genau diejenigen Funktionen $x(t)$, für die $F(t,x(t))$, $t \in I$, konstant ist.

- (25) ist exakt $\Longleftrightarrow$ Integrabilitätsbedingung $P_x = Q_t$ ist auf R erfüllt.
- **Satz:** Ist (25) exakt und $Q(t_0,x_0) \neq 0$, $(t_0,x_0) \in \mathring{R}$, so besitzt die Gleichung

$$F(t,x(t)) = F(t_0,x_0) =: C \tag{26}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0 genau eine stetig differenzierbare Lösung $x(t)$, mit $x(t_0) = x_0$, die man durch Auflösen von (26) nach $x(t)$ erhält. Bei der Integration von P bzw. Q muß $x = x_0$ bzw. $t = t_0$ festgehalten werden.

- Die Explosionsgleichung $\dot{x} = x^2$ ist exakt. Die CR-DGL's sind exakt, da u, v die Laplace-Gleichung erfüllen.
- Ist (25) nicht exakt, aber

$$\mu(t,x)\,P(t,x)\,dt + \mu(t,x)\,Q(t,x)\,dx = 0, \tag{27}$$

mit dem integrierenden Faktor (Eulerschen Multiplikator) $\mu(t,x)$ ist exakt, so haben (25) und (27) die gleichen Lösungen.

3.2 Separation der Variablen, Variation der Konstanten

- **Satz:** Eine DGL der Form $g(x)\,\dot{x} = f(t)$ ist äquivalent zu $\frac{d}{dt}G(t,x(t)) = f(t)$, mit $\frac{d}{dx}G(t,x(t)) = g(x) \hookrightarrow$ es existiert ein offenes Intervall I, mit $t_0 \in I$, auf dem genau eine Lösung $x(t)$ existiert, die man durch Integration und Auflösen nach $x(t)$ erhält.
- **Satz:** Eine lineare inhomogene DGL der Form $\dot{x} = f(t)x + g(t)$ kann mit der Variation der Konstanten gelöst werden: Die Integrationskonstante der homogenen Lösung wird als Funktion von t aufgefaßt.

3.3 Banachscher Fixpunktsatz

- **Satz:** Sei X eine abgeschlossene Teilmenge($\neq \emptyset$) eines Banachraumes und $f : X \longrightarrow X$ eine Kontraktion mit $\|f(x) - f(y)\| \leq q\,\|x - y\|$, $q < 1$.

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $x \in X$, der bei beliebigem Startpunkt iterativ gewonnen werden kann: $x_{n+1} = f(x_n)$ (man definiert also eine Folge (x_k) durch $x_0 = x_0$, $x_{k+1} = f(x_k)$).

Es gilt die Abschätzung

$$|x - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| \tag{28}$$

• Beweis: Ausgehend von $|x_{n+k} - x_n| = |x_{n+k} - x_{n+(k-1)} + x_{n+(k-1)} - ... - x_n|$ ist die Abschätzung (28) zu zeigen. Dadurch identifiziert man (x_n) als Cauchy-Folge. f ist stetig $\Longrightarrow x = f(x)$. Eindeutigkeit über die Abschätzung: $|x - y| \leq |x - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - y|$

Für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist x natürlich der Schnittpunkt von f mit der 1. Winkelhalbierenden.

3.4 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

• **Satz:** Sei $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Streifen $S := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ t_0 \leq t \leq t_0 + a,\ -\infty < x < \infty\}$ definiert und stetig, mit der Lipschitz-Bedingung bzgl. x: $|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq L\,|x(t) - y(t)|$ (L unterliegt hier keiner Einschränkung). Die benötigte Kontraktion ergibt sich aus der Wahl von a.

Dann hat das AW-Problem

$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{29}$$

genau eine Lösung auf $J = [t_0, t_0 + a]$.

• Beweis: Zu zeigen ist die Gleichwertigkeit von (29) zu $x = Tx$, mit dem Integraloperator $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$, der jede Funktion aus dem Banachraum $C(J)$ wieder auf $C(J)$ abbildet. Ist $x(t)$ Lösung von (29), so folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds =: Tx$ $(\star)$. Umgekehrt ist die rechte Seite von $(\star)$ differenzierbar, also $x' = f(t,x)$, und $(\star)$ genügt der Anfangsbedingung. Die Lösungen von (29) sind dann die Fixpunkte von T ($\hookrightarrow$ Picard-Iteration).

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist der Satz von Picard-Lindelöf vollständig bewiesen, wenn man zeigt, daß $T : C(J) \longrightarrow C(J)$ eine Kontraktion ist.

Normiert man den Raum C(J) mit der Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max_{t \in J}\{|x(t)|\}$, so folgt:

$$\begin{aligned} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\,ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds \\ &\leq L\,(t - t_0)\|x - y\|_\infty \\ &\leq La\,\|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $t \in J$, also: $\|Tx - Ty\|_\infty \leq La\,\|x - y\|_\infty$ Für $La < 1 \Longleftrightarrow a < \frac{1}{L}$, also kleines Intervall J ist T eine Kontraktion.

• Für $a \geq \frac{1}{L}$ zerstückelt man J bis T einer kontraktiven Lipschitz-Bedingung in den einzelnen Stücken genügt und setzt danach die Lösungen zusammen. (Den Existenzbeweis auf ganz J liefert die gewichtete Maximumsnorm $\|x\| := \max_{t \in J}\{|x(t)|\,e^{-\alpha t},\ \alpha > 0\}$ in einem Schritt.)

• Die Iteration führt bei homogenen linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten auf das Fundamentalsystem e^{At}.

- Eine hinreichende Bedingung für Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitz-Konstanten L ist $\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq L$ (Beweis über Mittelwertsatz).
- Da f einfach eine Funktion von zwei Variablen t und x ist und für sich genommen noch nichts mit der späteren Lösung $x(t)$ zu tun hat, muß man folgenden Zusatz beachten:
- **Satz:** Ist $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht auf ganz S definiert, sondern nur auf $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 |\ t \in [t_0, t_0 + a],\, x \in [x_0 - b, x_0 + b]\}$, so setzt man f auf dem Streifen S stetig fort, z.B. über

$$\bar{f}(t,x) := \begin{cases} f(t, x_0 - b) & , x < x_0 - b \\ f(t,x) & , (t,x) \in R \\ f(t, x_0 + b) & , x > x_0 + b \end{cases}$$

- Die Lösung von $x' = \bar{f}(t,x)$ auf R ist auch die Lösung von $x' = f(t,x)$ auf R.
- Da $|\bar{f}| \leq \underset{(t,x)\in R}{max} \{|f(t,x)|\} =: A$ ist $|x'| \leq A$ und die Lösung $x(t)$ bewegt sich zwischen den beiden vom Punkt (t_0, x_0) ausgehenden Geraden mit Steigung $\pm A$, d.h. $x(t)$ verläßt R frühestens bei $t = t_0 + \alpha$, wobei $\alpha = min \left\{a, \frac{b}{A}\right\}$ ist.
- **Definition:** $f(t,x)$ genügt in $D \subset \mathbb{R}^2$ einer *lokalen* Lipschitz-Bedingung bzgl. x, wenn $\forall (t_0, x_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, x_0)$ existiert, so daß f in $D \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.
- **Satz:** Genügt jetzt $f \in C(D)$ in $D \subset \mathbb{R}^2$, *offen*, einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. x, dann existiert $\forall (t_0, x_0) \in D$ eine eindeutige Lösung von (29), die dem Rand von D beliebig nahe kommt.

(Die Aussage ist wegen des Satzes von Heine-Borel klar für alle Kompakta $K \subset D$.

- **Beweis:** Es gilt: Ist eine Lösung eindeutig, so existiert eine nicht weiter fortsetzbare Lösung. Dann muß man nur noch zeigen, daß *diese* Lösung dem Rand von D beliebig nahe kommt.
- **Satz:** Sei f eine $\mathbb{C}^m$-wertige beschränkte, lipschitz-stetige holomorphe Funktion auf $G \subset \mathbb{C}^{m+1}$, dann gibt es genau eine Lösung von $x' = f(t,x)$, mit $x(t_0) = x_0$, auf G.
- Der normierte Raum der holomorphen Funktionen auf $I \subset \mathbb{C}$ ist ein Banachraum.
- **Satz:** Sei f eine $\mathbb{C}^m$-wertige analytische Funktion auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^{m+1}$, die einer Lipschitzbedingung bzgl. x genügt, mit $|f(t,x)| \leq M$. Sei außerdem $Z := \{(t,x) \in \mathbb{C}^{m+1} ;\ |t - t_0| \leq a\,,\ |x - x_0| \leq b\} \subset G$. Dann existiert eine eindeutige Lösung des AW-Problems $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, in $|t - t_0| \leq \alpha := min\{a, \frac{b}{M}\}$.
- **Satz:** Sei f stetig auf $I \times \mathbb{R}^m$ und gelte auf dem Intervall $J \subset I \subset \mathbb{R}$ für irgendeine Funktion $x : J \longrightarrow \mathbb{R}^m : \dot{x} = f$.

Dann gilt entweder

a) es existiert eine Polstelle in J oder

b) $x(t)$ kann als Lösung der Differentialgleichung auf ganz I fortgesetzt werden.

- Der Satz gilt z.B. für $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, wenn A, b stetig.
- **Satz:** Sei $x' = f(t, x, \alpha)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $t \in I$ kompakt. Sei weiter f stetig und in x lokal lipschitz-stetig.

Dann hat das AW-Problem zu x_0 eine eindeutige Lösung $x(t, x_0, \alpha)$, die *stetig* von x_0 und α abhängt.

- Mit dem Parameter α kann man das Verhalten der Lösung also stetig verändern.

3.5 Lemma von Gronwall

• **Satz:** Sei $f: J = [t_0, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} h(s) f(s) ds,\ \alpha \in \mathbb{R}$, und $h(t) \geq 0$ stetig. Dann gilt

$$f(t) \leq \alpha\, e^{H(t)}\,, \qquad H(t) := \int_{t_0}^{t} h(s) ds.$$

• Mit dem Lemma von Gronwall beweist man folgende Sätze:

• **Satz:** Sind zwei lipschitz-stetige Lösungen $x_0(t)$, $x_1(t)$ des *autonomen* Vektorfelds $\dot{x} = f(x)$ mit Lipschitzkonstante L gegeben, wobei für die Anfangswerte gilt $|x_0 - x_1| \leq \eta$, dann gilt:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + a] \qquad |x_0(t) - x_1(t)| \leq \eta e^{L(t-t_0)}$$

• **Satz:** Sind $\tilde{x}_0(t)$, $\tilde{x}_1(t)$ zwei lipschitz-stetige ϵ-Approximationen von $\dot{x} = f(t,x)$ $\ |\dot{\tilde{x}}_i(t) - f(t, \tilde{x}_i(t))| < \epsilon_i$, mit $|\tilde{x}_0 - \tilde{x}_1| < \eta$. Dann gilt:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + a] \qquad |\tilde{x}_0(t) - \tilde{x}_1(t)| \leq \left(\eta + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{L}\right) e^{L(t-t_0)} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{L}$$

3.6 Faltung

• **Definition:** Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d^n y$, ist die assoziative und kommutative Faltung von f mit g im Punkt x definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, d^n y \qquad , wenn \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)\, g(x-y)|\, d^n y < \infty$$

• Es gilt $f * g = g * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und durch die Faltung wird eine kommutative Algebrastruktur erklärt. Weiterhin gilt: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. f hat einen kompakten Träger, wenn f nur auf einer kompakten Menge von Null verschieden ist.

• Beim Falten vererbt sich die Glattheitseigenschaft einer der beiden Funktionen auf das gesamte Produkt.

• Durch eine Faltung läßt sich eine Funktion aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ glätten, also durch eine C^∞-Funktion approximieren, denn $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

• **Satz:** Mit dem Glättungskern

$$\psi_\delta(x) := \begin{cases} \frac{\psi_0}{\delta^n} exp\left(\frac{\delta^2}{\delta^2 - |x|^2}\right) & , |x| < \delta \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

gilt $\lim\limits_{\delta \to 0} \psi_\delta * f = f$, wobei $\psi_\delta * f$ glatt, also aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.7 Existenzsatz von Peano

• **Definition:** Durch $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$ wird punktweise Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) auf J definiert:

$$\forall \epsilon > 0, \forall t \in J\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |f_n(t) - f(t)| < \epsilon$$

• **Definition:** Die Funktionenfolge $(f_n)(t)$ konvergiert auf J gleichmäßig gegen f, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \forall t \in J,\ |f_n(t) - f(t)| < \epsilon$$

- **Definition:** Eine Menge $M = f_1, f_2, ...$ von auf $J = [a, b]$ stetigen Funktionen heißt gleichgradig stetig, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta(\epsilon) > 0 \, : \, \forall t, \bar{t} \in J, \, |t - \bar{t}| < \delta, \, \forall f \in M \; |f(t) - f(\bar{t})| < \epsilon$$

- Die Menge aller auf J lipschitz-stetigen Funktionen mit einheitlicher Lipschitz-Konstanten ist gleichgradig stetig.

- **Hilfssatz:** Ist die Funktionenfolge $(f_n(t))$ in J gleichgradig stetig und konvergiert sie punktweise für alle $t \in A$ (A ist eine in J dichte Punktmenge, z.B. $\mathbb{Q} \cap J$), so konvergiert sie sogar gleichmäßig auf ganz J. $f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ ist also stetig.

- **Satz von Arzelà-Ascoli:**

Jede in J beschränkte gleichgradig stetige Funktionenfolge (f_n) enthält eine in J gleichmäßig konvergente Teilfolge.

- Beweis: Sei $A = \{t_1, t_2, ...\}$ abzählbar. Die Zahlenfolge $(f_n(t_1))$ ist beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge (f_{n_1}), die für $t = t_1$ (aber i.A. nicht für $t = t_2$) konvergiert. Aber $(f_{n_1}(t_2))$ ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge (f_{n_2}), die sowohl für t_1 als auch t_2 konvergiert, etc.

Die Diagonalfolge $\{f_{1_1}, \, f_{2_2}, \, f_{3_3}, ...\}$ konvergiert also für alle $t \in A$. Nimmt man ein $t \in A$, so existiert ein Folgenglied f_{n_n}, ab dem die Diagonalfolge für dieses t konvergiert. Aus dem Hilfssatz folgt die gleichmäßige Konvergenz auf J.

- Analog zur schwachen Form des Satzes von Picard-Lindelöf wird erst die schwache Form des Existenzsatzes von Peano bewiesen:

- **Satz:** Sei $f(t, x)$ stetig und auf dem Streifen $S = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ beschränkt. Dann existiert mindestens eine Lösung von $x' = f(t, x)$ auf J, mit $x(t_0) = x_0$.

- Beweis: Zu zeigen ist, daß die Funktion $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \, ds$, - die ja existiert - auf J stetig ist. Die Näherungslösung

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_0 & , \; t \leq t_0 \\ x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x_\alpha(s - \alpha)) \, ds & , \; t \in J \end{cases} ,$$

die einer einheitlichen Lipschitzbedingung genügt und beschränkt ist, besitzt nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $x_{\alpha_n}(t) = x_0 + \int_{t_o}^{t} f(s, x_{\alpha_n}(s - \alpha_n)) \, ds$.

Auch $x_{\alpha_n}(t - \alpha_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $x(t) := \lim\limits_{n \to \infty} x_{\alpha_n}(t - \alpha_n)$, womit eine Lösung des AW-Problems gefunden ist: $x(t) \in C(J)$.

- Dieser Satz gilt auch für ein Rechteck und die Verallgemeinerung zum Satz von Peano ist (analog zum Satz von Picard-Lindelöf):

- **Satz von Peano:**

Ist $f(t, x)$ auf einem Gebiet D stetig, so geht durch jeden Punkt $(t_0, x_0) \in D$ mindestens eine Lösung von $x' = f(t, x)$.

Jede Lösung besitzt eine Fortsetzung, die dem Rand von D beliebig nahe kommt.

- Mit der Konstruktion des letzten Satzes verwandt ist das Polygonzug-Verfahren von Cauchy:

$t_i := t_0 + k\,\alpha$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\alpha \to 0$ geht die Schrittweite gegen 0 und das Verfahren konvergiert.

$$\begin{aligned}
u_\alpha(t) &:= x_0 + f(t_0, x_0)\,(t - t_0) && , \; t_0 \le t \le t_1 \\
v_\alpha(t) &:= u_\alpha(t_1) + f(t_1, u_\alpha(t_1))\,(t - t_1) && , \; t_1 \le t \le t_2 \\
w_\alpha(t) &:= v_\alpha(t_2) + f(t_2, v_\alpha(t_2))\,(t - t_2) && , \; t_2 \le t \le t_3 \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

3.8 Autonome Systeme

- **Definition:** Ein System $x' = f(x)$ heißt autonom, wenn die rechte Seite nicht von t abhängt.
- Sei f in $G \subset \mathbb{R}^n$ lokal lipschitz-stetig. AW-Probleme sind dann eindeutig lösbar und die Lösung läßt sich bis zum Rand von $D = \mathbb{R} \times G$ fortsetzen.
- **Definition:** Im Zsgh. mit autonomen Systemen nennt man $\mathbb{R}^n$ den Phasenraum und die durch die Lösung x auf dem Existenzintervall J erzeugte Kurve $x(J) \subset G$ die Trajektorie der Lösung x.
- **Definition:** In jedem Punkt des Phasenraumes ist ein Vektor gegeben, der Vektor der Phasengeschwindigkeit. Die Gesamtheit dieser Vektoren bilden das Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit im Phasenraum. Dieses Vektorfeld bestimmt die DGL des Prozesses.
- **Definition:** Eine Kurve, die in jedem Punkt x tangential zu der in x gegebenen Richtung des Feldes verläuft, heißt Integralkurve des Richtungsfeldes.
- Das Problem, Integralkurven eines solchen Feldes zu finden, ist äquivalent dem Problem, eine gegebene stetige Funktion zu integrieren.
- Zwei Trajektorien sind entweder disjunkt oder identisch. Durch jeden Punkt von G läuft genau eine Trajektorie.

Definition: Die Gesamtheit der Trajektorien ist das Phasenportrait der DGL.

- **Fluß:** Gegeben ist das autonome AWP $x' = f(x)$, mit $x(0) = x_0$, $f \in C^1(E)$. E ist der Phasenraum. Sei $\Omega = \mathbb{R} \times E$ und $\phi(t, x_0)$ Lösung des AWP. Dann heißt $\phi : \Omega \longrightarrow E$ der Fluß des dynamischen Systems auf E (das 1. Argument von ϕ ist ein beliebiger Zeitpunkt, zu dem ϕ Lösung des AWP ist, das 2. Argument ist ein beliebiger Startpunkt der durch ϕ charakterisierten Trajektorie).

Jeder Punkt y aus E kann Startpunkt einer Trajektorie sein. Setzt man zudem noch einen Zeitpunkt s in ϕ ein, so erhält man den Punkt $\phi(s, y) \in E$.
Für den Fluß gelten folgende Eigenschaften:

1) $\phi(0, y) = y$ (weil y im 2. Argument Startpunkt der entsprechenden Trajektorie ist, also der Punkt, den ϕ zur Zeit $t = 0$ annimmt).

2) $\phi(s, \phi(t, y)) = \phi(s + t, y)$,$\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ fest (y ist Startpunkt einer Trajektorie bei $t = 0$. Setzt man im ersten Argument von ϕ den Zeitpunkt t ein, so erhält man den Punkt $\phi(t, y)$ im Phasenraum E, man 'läuft' entlang der Trajektorie von 0 nach t. Nun nimmt man $\phi(t, y)$ als Startpunkt und

setzt s als erstes Argument von ϕ ein $\hookrightarrow \phi(s, \phi(t,y))$. Auf der durch ϕ und $y \in E$ charakterisierten Trajektorie 'läuft' man also um s weiter).

3) $\phi(-t, \phi(t,y)) = \phi(t, \phi(-t,y)) = y$,$\forall\, t \in \mathbb{R}$ (weil $\phi(-t, \phi(t,y)) = \phi(-t+t, y) = y = \phi(t-t, y) = \phi(t, \phi(-t,y))$).

- **Definition:** $\Gamma(x_0) := \{x \in E \mid x = \phi(t, x_0) \;,\; t \in \mathbb{R}\}$ heißt Orbit der Trajektorie von $x' = f(x)$ durch x_0 zur Zeit $t = 0$.
- Der Fluß eines Vektorfeldes transportiert ein Gebiet $V_1 = \phi(t_1, y)$ (das man erhält, wenn man y bei festem t_1 variiert) nach $V_2 = \phi(t_2, y)$.
- **Periodische Lösungen von autonomen Systemen:** Ist $x(t)$ eine Lösung in $J = (a,b)$, so ist $y(t) := x(t+c)$ eine Lösung in $(a-c, b-c)$, also ist auch $x(t+t_1-t_0)$ Lösung in $(a-(t_1-t_0), b-(t_1-t_0))$. Dieses Intervall überschneidet sich immer mit J, falls $t_0, t_1 \in J$. Ist y weitere Lösung mit $y(t_0) = x(t_1)$, so gilt $y(t) = x(t + (t_1 - t_0))$ für $t \in (a-(t_1-t_0), b-(t_1-t_0))$, da beide Seiten den gleichen AW haben (und Lösungen sind). Setzt man $y = x$, also $x(t_0) = x(t_1)$, so ist nach dem eben Gesagten x periodisch mit der Periode $t_1 - t_0$.
- **Satz:** Wenn also für eine Lösung $x(t)$ eines autonomen Systems mit lipschitz-stetiger rechter Seite $f(x)$ gilt $x(t_0) = x(t_1)$, so gilt $x(t) = x(t + t_1 - t_0)$ (auf einem gewissen Intervall und wegen der Eindeutigkeit dann bis zum Rand).
- **Definition:** Ein Punkt $a \in G$ heißt GGW-Punkt (auch singulärer bzw. kritischer Punkt) von f, falls $f(a) = 0$.
- Ist $a \in G$ GGW-Punkt, so ist $x(t) = a$ Lösung.
- Ist x_g GGW-Punkt und $x_0 \neq x_g$, dann ist auch $x(t)$, mit $x(0) = x_0$, niemals ein GGW-Punkt.
- Existiert für irgendeine Lösung x der Grenzwert $a = \lim\limits_{t\to\infty} x(t) \in G$, so ist a GGW-Punkt.
- **Lemma:** An einem Nicht-GGW-Punkt ist das autonome System $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, lokal äquivalent zu dem (nicht autonomen System)

$$\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{f_k(x)}{f_j(x)} \qquad , j \text{ fest, geeignet, } k \in \{1, ..., n\} \setminus \{j\}$$

- **Beweis:** Das System ist $\frac{dx_j}{dt} = f_j(x)$, $j \in \{1, ..., n\}$. Ist x_1 Nicht-GGW-Punkt, also $f(x_1) \neq 0$, so ist f aus Stetigkeitsgründen nahe x_1 von Null verschieden, nach dem Satz über implizite Funktionen ist x_j also lokal umkehrbar ($\hookrightarrow t = t(x_j)$) und man bildet $\frac{dx_k}{dx_j} = \frac{dx_k}{dt}\frac{dt}{dx_j} = \frac{f_k}{f_j}$.
- D.h. Phasenbahnen sind lokal Lösungen von $f_j(x)dx_k - f_k(x)dx_j = 0$.
- **Definition:** Ein GGW-Punkt x_g heißt Attraktor, wenn eine Umgebung $U(x_g)$ existiert, so daß $x(t, x_0) \to x_g$, $(t \to \infty)$, für alle $x_0 \in U(x_g)$. (Wenn x_g ein "Einzugsgebiet" hat.)
- **Definition:** Für eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ wird die Flußableitung entlang einer Kurve $x(t)$ definiert als $D_t F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$, mit $F = F(x(t))$.
- **Definition:** Ist $x(t)$ Lösung der DGL, dann gilt $D_t F = 0$ und F heißt 1.Integral oder Konstante der Bewegung.
- F ist also für alle t konstant, wenn $x(t)$ Lösung der DGL ist. Es gilt: $x_0 \in [F = c] \Longrightarrow x(t, x_0) \in [F = c]$, $\forall t$, d.h. die Niveau-Flächen von F sind invariante Mengen hinsichtlich des Flußes.

- Beispielsweise gilt für das System $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \overset{(\star)}{=} \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ 2x(x^2 - y) \end{pmatrix}$ lokal: $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^3}{2x(x^2-y)} \Longleftrightarrow: dF(x,y) = 0$, mit $\partial_x F = f_1$, $\partial_y F = f_2 \Longrightarrow$ Das **1. Integral (Konstante der Bewegung)** ist dann $F(x,y) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 y + \frac{1}{4}y^4$.

Die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des Systems $(\star)$ erfüllt also lokal die Bedingung $F(x,y) = const$, bei einer geschlossenen Höhenlinie von F liegt also eine periodische Bahn vor.

- **Satz von Morse:** Sei $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, mit kritischem Punkt x_k *von* F, d.h. $\vec{\nabla} F(x_k) = 0$. Weiter sei $F(x) = F(x_k) - \sum\limits_{i=1}^{k} c_i x_i^2 + \sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i x_i^2 + REST$.

Dann gibt es einen lokalen Diffeomorphismus $x \to y$ und $F(x) \to G(y)$, so daß $G(y) = G(x_k) - \sum\limits_{i=1}^{k} c_i y_i^2 + \sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i y_i^2$.

In den neuen Koordinaten ist die Niveaufläche also diffeomorph zu einem Kreis (bzw. zu einer Hyperbel, für $k \neq 0$).

- Die Bahnen nahe x_k sind diffeomorph zu Kreisen, man erhält also geschlossene Bahnen.

3.9 Potenzreihenansätze

- Im offenen Konvergenzbereich sind Potenzreihen gliedweise differenzierbar.
- Konvergenzradius: Wenn fast alle Koeffizienten der Potenzreihe von Null verschieden sind, dann gilt $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Allgemein gilt: $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$.

- **Satz:** Sind die Funktionen $s(t)$, $a_o(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ stetig auf dem beliebigen Intervall J, so besitzt das AW-Problem

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, x = s(t) \tag{30}$$

mit $t_0 \in J$ und beliebigen Anfangswerten $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, $\ldots\, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung auf J.

- **Satz:** Sind die Funktionen $s(t)$, $a_o(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ im Intervall $(t_0 - r, t_0 + r)$ in Potenzreihen um t_0 entwickelbar, so gilt dasselbe für die Lösung $x(t)$ von (30).
- **Definition:** Bei der DGL

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0\,, \tag{31}$$

P, Q, R $\mathbb{R}$-wertig, nennt man x_0 singulären Punkt, wenn $P(x_0) = 0$. Sind die Funktionen $A(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$, $B(x) = (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ um den singulären Punkt x_0 in Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (mit Konvergenzradius ρ) entwickelbar, so heißt x_0 schwach singulär. Damit ist (31) äquivalent zu $(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)A(x)y' + B(x)y = 0$.

- Dagegen ist $x_0 = 0$ für $x^2 y'' + 2y' - xy = 0$ stark singulär, da $A(x)$ nicht um x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.
- Ein (immer vorhandener) Index $r \in \mathbb{C}$ des Potenzreihenansatzes $y(x) := x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (Für $x \in \mathbb{R}$,

$r \in \mathbb{C}$ ist x^r eindeutig) genügt allgemein der aus dem Einsetzen in (31) erhaltenen Indexgleichung

$$r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0.$$

Definition: r_1 heißt exponiert, wenn

1. $r_1 \in \mathbb{C}$ (dann ist auch r_2 exponiert)
2. oder $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 \geq r_2$)
3. oder $(r_1 - r_2) \notin \mathbb{Z}$ (dann ist auch r_2 exponiert)

- **Satz:** Sei $x_0 = 0$ ein schwach singulärer Punkt von (31) und r ein exponierter Index von (31). Dann besitzt (31) auf $0 < |x| < \rho$ eine Lösung der Form

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

.

- Diesen Ansatz setzt man in die DGL ein und formt alle auftretenden Reihen auf gleiche Potenzdarstellung x^n um.
- Hierbei kann man o.B.d.A. $c_0 \neq 0$ wählen und wegen der homogenen linearen DGL auch o.B.d.A $c_0 = 1$.
- Ist $y(x)$ komplexwertig, so sind Real- und Imaginärteil reellwertige Lösungen von (31).

3.10 Spezielle DGL's

- Airysche DGL: $x'' - tx = 0$ (Potenzreihenansatz)
- Hermitesche DGL: $x'' - 2tx' + \lambda x = 0$ (Potenzreihenansatz)

Die hermiteschen Polynome $h_n(t) := (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2})$ genügen der DGL mit $\lambda = 2n$ und der Relation $h_n'(t) = 2n\, h_{n-1}(t)$.

- Legendresche DGL: $(1-t^2)x'' - 2tx' + \lambda(\lambda+1)x = 0$ (Potenzreihenansatz)
- Tschebyscheffsche DGL: $(1-t^2)x'' - tx' + \lambda^2 x = 0$ (Potenzreihenansatz)
- Besselsche DGL: $t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$ (Potenzreihenansatz)
- Laguerresche DGL: $tx'' + (1-t)x' + \lambda x = 0$ (Potenzreihenansatz)
- logistische DGL: $x' = x(a - bx)$ (Separation der Variablen)
- Bernoulli DGL: $x' + g(t)x + h(t)x^\alpha = 0$ (Multipliziert man mit $(1-\alpha)x^{-\alpha}$, so erhält man

$$(x^{1-\alpha})' + (1-\alpha)g(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(t) = 0 \qquad \text{, also } z' + \tilde{g}(t)z + \tilde{h}(t) = 0\ )$$

- **Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra:** x sei die Beutepopulation und y die Räuberpopulation, $a, b, c, d > 0$: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}$. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz existiert zu jedem AW genau eine Lösung. Aus $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt unmittelbar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$. Der AW

$\begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ führt auf die einzige nicht-triviale stationäre (d.h. konstante) Lösung.

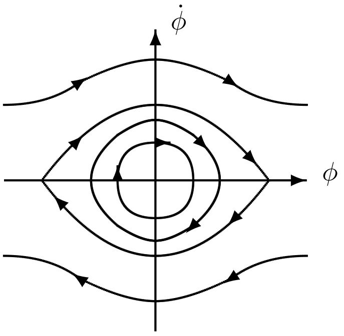
Im Übrigen sind alle positiven Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen periodisch.

- Eine genäherte Lösung erhält man durch
- **Linearisierung:**

Die GGW-Punkte sind $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$. Der allgemeine Ansatz ist $f(x) = f(x_g) + Df(x_g)(x - x_g) + \mathcal{O}(\|x\|^2) \approx Df(x_g)(x - x_g)$. Hier folgt aus $f(x) = \begin{pmatrix} x(a-by) \\ y(-c+dx) \end{pmatrix}$ die totale Ableitung $Df = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ by & -c+dx \end{pmatrix}$. Nahe $x_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt dann also $f(x) = \begin{pmatrix} ax \\ -cy \end{pmatrix}$, mit Exponentialfunktionen als Lösungen der Linearisierung. Nahe $x_g = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}$ erhält man $f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{d} \\ d\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{c}{d} \\ y - \frac{a}{b} \end{pmatrix}$.

- Gleichung des mathematischen Pendels: $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0 \hookrightarrow$ linearisierte Pendelgleichung: $\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$.

Phasenportrait dieses autonomen Systems:



- Bei einer DGL der Form $x' = f(t)$ erhält man alle Lösungen aus einer Lösung, wenn man diese bzgl. x verschiebt, denn $x(t)$ ist einfach das Integral $\int_{t_0}^{t} f(s)ds + C$.

3.11 Lineare Systeme

- Es werden nur submultiplikative Normen (auch: "verträgliche" Normen) zugrundegelegt, z.B. $|A| = \sum_{i,j}|a_{ij}|$, $|y| = \max_i |y_i|$, $|A|_e = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ oder die Operatornorm $|A| = \max_x\{|Ax|\,;\ |x| \leq 1\}$.
- **Hilfssatz:** Sind $A(t), B(t), y(t)$ differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{R}$, so auch $(AB)' = A'B + AB'$, $(Ay)' = A'y + Ay'$ und $(\det A)' = \sum_{i=1}^{n} \det(a_1, .., a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, .., a_n)$. $(a_k, y \in \mathbb{C}^n,\ A, B \in \mathbb{C}^{n\times n})$
- **Existenz- und Eindeutigkeitssatz:** Sind $A(t)$, $b(t)$ stetig auf dem Intervall J, dann hat das AW-Problem

$$y' = A(t)y + b(t)\ ,\ y(\tau) = \eta \qquad (\tau \in J)$$

genau eine Lösung auf ganz J.

- $y(t)$ hängt in jedem kompakten Teilintervall $I \subset J$ stetig von $A(t)$, $b(t)$, η ab.
- **Beweis:** Stetige Funktionen sind auf Kompakta beschränkt. Mit $|A(t)| \leq L\,,\ |b(t)| \leq \delta\,,\ |\eta| \leq \gamma$ in$I$, genügt $f(t, y) = Ay + b$ in $D = I \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. y. Analog dem Satz für

$n = 1$ existiert eine eindeutige Lösung, die sich bis zum Rand von D fortsetzen läßt, also auf ganz J.

- Insbesondere gilt der Eindeutigkeitssatz für $\dot{x} = a(t)x + b$ im Fall $n = 1$. Für die Eindeutigkeit genügt bei einer DGL dieser speziellen Form bereits die Stetigkeit.

3.12 Homogene lineare Systeme

- **Satz:** Ist $A(t)$ stetig in J, so bilden die Lösungen der DGL $y' = A(t)y$ einen n-dimensionalen linearen Raum.

Für festes $\tau \in J$ wird durch $\eta \overset{\varphi=y}{\longmapsto} y(t, \tau, \eta)$ ein linearer Isomorphismus $\varphi : J \times E \longrightarrow C^1(J \times J \times E)$ zwischen $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ und dem Raum der Lösungen erklärt.

- **Beweis:** $y' = A(t)y$ hat zu gegebenem (τ, η) eine eindeutige Lösung auf J. φ ist also bijektiv. $\varphi(\tau, \eta) := y(t, \tau, \eta)$ ist linear bzgl. η, denn (mit dem Superpositionsprinzip) haben die Lösungen $y(t, \tau, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)$ und $\lambda_1\, y(t, \tau, \eta_1) + \lambda_2\, y(t, \tau, \eta_2)$ den gleichen AW (τ einsetzen), sind also gleich. Der Raum von η hat n-dimensionale Basis. Über diese Isomorphie vererbt sich die Dimension auf den Lösungsraum.
- **Folgerungen:**

a) Wegen der Bijektivität von φ ist $Kern(\varphi)$ der Nullvektor im η-Raum, also wird $\eta = 0$ die Null-Lösung $y \equiv 0$ zugeordnet. Wegen $y(\tau) = \eta = 0 \overset{(Linearität)}{\Longrightarrow} y \equiv 0$, in J, gilt (man darf (τ, η) beliebig wählen): Ist $y = c_1y_1 + ... + c_ny_n = 0$ für ein $t \in J$, dann für alle $t \in J$. Die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit in einem Punkt ist also *äquivalent* zur linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit in allen Punkten.

b) Es gibt n linear unabhängige Lösungen (für *ein* festes τ). Durch dieses Fundamentalsystem läßt sich jede Lösung von $y' = A(t)y$ eindeutig darstellen.

c) Die n Lösungen $y_1, ..., y_n$ lassen sich zur Lösungsmatrix $Y(t) = (y_1, ..., y_n)$ zusammenfassen. Die Matrizengleichung $Y'(t) = A(t)Y(t)$ ist äquivalent zu den n DGL's $y_i' = A(t)y_n$: offensichtlich ist $Y' = (y_1', ..., y_n') = (A(t)y_1, ..., A(t)y_n) = A(t)Y$.

d) Es gilt: $Y(t)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $Y(\tau) = C$ regulär ist. Denn: Ist $Y(\tau) = C$ regulär, dann sind $\eta_1, ..., \eta_n$ linear unabhängig, nach $a)$ sind also $y_1(t), ..., y_n(t)$ linear unabhängig, $\forall t \in J$, also ist $Y(t)$ regulär. Ist umgekehrt $Y(t)$ regulär, so sind $y_1(t), ..., y_n(t)$ linear unabhängig, nach $a)$ also auch $\eta_1, ..., \eta_n$, also ist C regulär.

e) Ist $Y(t)$ Fundamentalsystem, so hat jede Lösung y die Form $y = Yc$, wobei $c \in \mathbb{R}^n$ alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$ durchläuft (Linearkombination der y_i).

f) Mit dem AW $X(\tau) = E$ (damit *ist* $X(t)$ ein Fundamentalsystem) ist $\dot{X} = A(t)X$ identisch mit den n AW-Problemen $x_i' = A(t)x_i$, $x_i(\tau) = e_i$.

g) Damit hat die allgemeine Lösung von $y' = A(t)y$ die Form $y(t) = X(t)\eta$, denn $X(t)\eta$ löst die DGL mit AW η. Außerdem folgt unmittelbar $Y(t) = X(t)Y(\tau)$, für jedes Fundamentalsystem $Y(t)$, denn $X(t)Y(\tau)$ löst die DGL mit dem gleichen AW wie $Y(t)$.

- **Satz:** Ist $Y(t)$ Fundamentalsystem mit $Y(\tau) = C$, so läßt sich jedes andere Fundamentalsystem $Z(t)$ in der Form $Z(t) = Y(t)B$ mit regulärer Matrix B darstellen.
- **Beweis:** Sei $Z(t)$ beliebiges Fundamentalsystem $\Longleftrightarrow Z' = A(t)Z,\ Z(\tau) = D$ regulär $\Longleftrightarrow Z(\tau) = C\,B = Y(\tau)B$, B regulär $\Longleftrightarrow Z(\tau)B^{-1} = Y(\tau)$ regulär $\Longleftrightarrow Y(t) = Z(t)B^{-1}$ ist Fundamentalsystem.
- **Satz:** Die Wronski-Determinante $W(t) := \det Y(t)$ eines Fundamentalsystems $Y(t)$ genügt der DGL $W' = (Spur\ A(t))W$.

Damit gilt: $W(t) = W(\tau)\exp(\int_\tau^t Spur\ A(s)ds)$. Insbesondere gilt $\det X(t) = \exp(\int_\tau^t Spur\ A(s)ds)$.

- $Y(t)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $W(t)$ nicht verschwindet. $W(t)$ läßt sich aber jetzt allein aus $det\,Y(\tau)$ und $A(t)$ berechnen, ohne explizite Kenntnis der Lösungen $y_1, ..., y_n$.
- Man kann das System der n DGL's natürlich auf ein System von $n-1$ DGL's reduzieren, wenn eine Lösung bekannt ist:
- **D'Alembertsches Reduktionsprinzip:** Ist eine Lösung x von $y' = A(t)y$ bekannt, so macht man den Ansatz $y(t) := \phi(t)x(t) + z(t)$, mit skalarer Funktion $\phi(t)$ und $z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \\ . \\ . \\ z_n(t) \end{pmatrix}$. Setzt man den Ansatz ein, so erhält man als Bedingung für $z'(t)$ ein homogenes lineares System mit $n-1$ Gleichungen. Hat man ein Fundamentalsystem $Z(t)$ dieses Systems bestimmt, so stellt $Z(t)$ zusammen mit $x(t)$ ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung dar. Um das Reduktionsverfahren auf das reduzierte System anzuwenden, benötigt man natürlich eine weitere Lösung.

3.13 Inhomogene lineare Systeme

- Wie im Fall $n = 1$ gilt der

Satz: $y(t) = y_p(t) + x(t)$ $\quad$ ($x(t)$ durchläuft alle Lösungen des homogenen Systems)

- **Beweis:** Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems besteht nur aus einer Lösung des homogenen Systems: Nach dem Superpositionsprinzip ist $z := y_1 - y_2$ Lösung, wenn y_1, y_2 Lösungen sind. Dann gilt: $z' = y_1' - y_2' = Ay_1 - Ay_2 = Az$.
- Durch Variation der Konstanten (hier wird c aus $y(t) = Y(t)c$ variiert) erhält man den

Satz: Sind $A(t),\ b(t)$ stetig auf J, so hat das AW-Problem $y' = A(t)y + b(t),\ y(\tau) = \eta$ die eindeutige Lösung

$$y(t) = X(t)\eta + \int_\tau^t X(t)X^{-1}(s)b(s)ds$$

Hier ist $X(t)$ das Fundamentalsystem der homogenen DGL mit $X(\tau) = E$. Dabei ist $X(t)\eta$ Lösung der homogenen DGL und der rechte Summand löst die inhomogene DGL.

3.14 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

• **Satz:** Ist A konstant in $y' = Ay$, so ist $y(t) = c\,e^{\lambda t}$ $(\lambda, c \neq 0, A$ komplex) genau dann eine Lösung, wenn $Ac = \lambda c$.

Die Lösungen $y_i(t) = c_i\,e^{\lambda_i t}$ $(i = 1, .., p)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren c_i linear unabhängig sind (z.B., wenn die Eigenwerte λ_i paarweise verschieden sind).

• Besitzt A also n linear unabhängige Eigenvektoren, so erhält man ein Fundamentalsystem von Lösungen.

• Sei A reell. Dann existieren i.A. auch komplexe EW $\lambda = \mu + i\nu$ zu komplexen EV $c = a + ib$, also komplexe Lösungen

$\Longleftrightarrow$ $Re\,y$, $Im\,y$ sind linear unabhängige *reelle* Lösungen von $y' = Ay$

$\Longleftrightarrow$ auch $\bar{y}(t) = \bar{c}\,e^{\bar{\lambda}t}$ ist Lösung (mit den gleichen reellen Lösungen $Re\,\bar{y} = Re\,y = e^{\mu t}(a\cos(\nu t) - b\sin(\nu t))$, $Im\,\bar{y} = Im\,y = e^{\mu t}(a\cos(\nu t) + b\sin(\nu t))$).

• Zu $2p$ echt komplexen EW λ_i, $\bar{\lambda}_i$ erhält man also nicht $4p$ reelle Lösungen, sondern nur die $2p$ reelle Lösungen $z_i(t) = Re(c_i e^{\lambda_i t})$, $z_i^*(t) = Im(c_i e^{\lambda_i t})$.

• Zu q reellen EW λ erhält man natürlich q reelle Lösungen $y = c\,e^{\lambda t}$. Für die lineare Unabhängigkeit der $2p + q$ reellen Lösungen ist natürlich hinreichend, daß die $2p + q$ EW paarweise verschieden sind.

• Es gilt also: Hat A n linear unabhängige (i.A. komplexe) EV, so hat A ein reelles Fundamentalsystem.

• **Jordan-Normalformen:** Zu jeder Matrix A existiert eine reguläre Matrix C, so daß $B = C^{-1}AC$ Jordanform hat (in verschiedenen Jordan-Kästchen können durchaus die gleichen EW auftreten).

• Die Nebendiagonale eines Jordan-Kästchens ist immer vollständig gefüllt. Das einem Jordankästchen mit r Zeilen und Diagonalelement λ entsprechende System $x' = Jx$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
x_1' &= \lambda x_1 + x_2 \\
x_2' &= \lambda x_2 + x_3 \\
. &\quad . \\
. &\quad . \\
x_{r-1}' &= \lambda x_{r-1} + x_r \\
x_r' &= \lambda x_r
\end{aligned}$$

und wird gelöst durch das Fundamentalsystem

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2\,e^{\lambda t} & \dots & \dots \\ & e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & \dots & \dots \\ & & e^{\lambda t} & \dots & \dots \\ & & & \ddots & \dots \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Jede einzelne Spalte von $X(t)$ löst das System $x' = Jx$. Es gilt $X(0) = E$.

- Ist z.B.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & \\ 0 & 0 & \lambda & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \nu & 1 \\ & & & & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

so ist das zugehörige Fundamentalsystem

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2\,e^{\lambda t} & & & \\ & e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & & & \\ & & e^{\lambda t} & & & \\ & & & e^{\mu t} & & \\ & & & & e^{\nu t} & t\,e^{\nu t} \\ & & & & & e^{\nu t} \end{pmatrix}$$

- Die n linear unabhängigen Lösungen $x_i(t)$ sind dann die Spalten von X :

$$x_i'(t) = B\,x_i(t) = C^{-1}AC\,x_i(t) \Longleftrightarrow (Cx_i)' = A(Cx_i) \Longleftrightarrow y_i = C\,x_i \tag{32}$$

- **Definition:** Ist λ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist $m(\lambda) = k$ die algebraische Vielfachheit von λ.
- **Definition:** Die Dimension $m_g(\lambda)$ des Eigenraums zu λ (also die Maximalzahl linear unabhängiger EV zum EW λ) heißt geometrische Vielfachheit von λ. Es gilt: $1 \leq m_g(\lambda) \leq m(\lambda) \leq n$. Die Zahl $m_g(\lambda)$ ist auch die Anzahl der Jordanblöcke zum EW λ.
- **Definition:** Ist $m(\lambda) = m_g(\lambda)$, so heißt λ halbeinfach. Im Jordanblock zu λ tritt dann keine 1 in der Nebendiagonale auf. So gilt etwa $m(-1) = 2$ bei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Zu $\lambda = -1$ existiert zwar die nicht-triviale Lösung $y(t) = c\,e^{-t}$, aber es existiert nur ein linear unabhängiger EV c zu $\lambda = -1$, also ist $m_g(\lambda) = 1 \Longrightarrow B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- **Definition:** Sind alle EW halbeinfach, so heißt B halbeinfach oder diagonalisierbar.
- Ein Jordan-Kästchen mit komplexem EW, das auf reelle Gestalt gebracht wurde, hat die Form

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \ddots & \\ & \ddots & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- Kennt man also die Jordanform B und die Übergangsmatrix C, so kann man die Lösungen von $y' = Ay$ bestimmen.

• Auf einem anderen Weg zur Berechnung der Lösungen bestimmt man zu einem EW λ mit $m(\lambda) = k$ alle linear unabhängigen EV c und rechnet dann nacheinander die Ansätze $y = (a+ct)e^{\lambda t}$, $y = (a+bt+ct^2)e^{\lambda t}$, ... durch, bis die Anzahl $m(\lambda)$ von Lösungen erreicht ist.

• Nach (32) gilt der

• **Satz:** Zu einer k-fachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms gibt es immer k linear unabhängige Lösungen

$$y_i = p_{i-1}(t)e^{\lambda t} \qquad , 1 \leq i \leq k \qquad , \text{wobei jede Komponente von } p_{i-1}(t)$$

ein Polynom vom Grad $\leq i-1$ ist. Betrachtet man jeden EW, so erhält man ein Fundamentalsystem. Möchte man ein reelles Fundamentalsystem, so nimmt man zu jedem nicht-reellen λ Real- und Imaginärteil als linear unabhängige Lösungen und erhält $n = 2p + q$ linear unabhängige reelle Lösungen.

3.15 Zwei-dimensionale reelle Systeme

• $y' = Ay$, $D := \det A \neq 0$ ($\Longrightarrow \lambda = 0$ ist kein EW), $S := Spur(A)$.

• $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - S\lambda + D$ hat die EW $\lambda, \mu = \frac{1}{2}(S \pm \sqrt{S^2 - 4D})$

• Ist $S^2 > 4D$, so ist $\lambda \neq \mu$ und $m(\lambda) = m_g(\lambda) = m(\mu) = m_g(\mu) = 1 \Longrightarrow A$ läßt sich auf die Jordan-Normalform

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

bringen. $C = (c, d)$ (EV zu λ, μ).

• Ist $S^2 = 4D$, so ist $\lambda = \mu$, $m(\lambda) = 2$ und die Jordan-Normalform von A ist $R(\lambda, \lambda)$, wenn λ halbeinfach ist oder

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

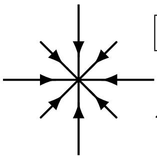
wenn λ nicht halbeinfach ist.

• Zu dem einen EV c existiert immer ein linear unabhängiger Vektor d, für den gilt: $(A - \lambda E)d = c$. Damit ist $C = (c, d)$ die Übergangsmatrix.

• Ist $S^2 < 4D$, so ist $\lambda = \bar{\mu} = \alpha + i\omega$. $C = (c, \bar{c})$ transformiert auch hier auf $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. Man möchte aber eine reelle Normalform, welche man erhält, indem man $Ac = \lambda c$ in Real- und Imaginärteil trennt. So ergibt sich die Normalform $K(\alpha, \omega) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$, $\omega > 0$.

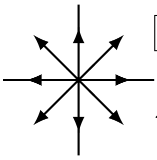
• Die affine Transformation auf die Jordan-Normalform erhält die globale Struktur der Lösungen. Sie werden höchstens verzerrt. Deshalb werden nur die drei Fälle $R(\lambda, \mu), R(\lambda), K(\alpha, \omega)$ (λ, μ immer ungleich Null) betrachtet:

• **Fall 1:** $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Longrightarrow y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, e^{\lambda t} \\ b\, e^{\mu t} \end{pmatrix}$. Die Trajektorien sind durch $\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} = \left(\frac{y}{b}\right)^{\lambda}$ charakterisiert.



$\boxed{\text{Abb.I}}$

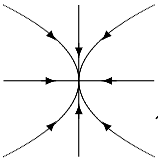
$\lambda = \mu < 0$



$\boxed{\text{Abb.II}}$

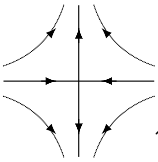
$\lambda = \mu > 0$ entspricht Zeitumkehr!

Für $\lambda \neq \mu$, aber beide entweder positiv oder negativ erhält man entsprechende Potenzkurven anstatt der Halbgeraden:



$\boxed{\text{Abb.I b)}}$

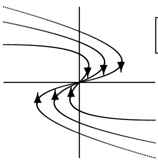
$\lambda \neq \mu$



$\boxed{\text{Abb.III}}$

$\lambda < 0 < \mu$

- **Fall 2:** $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{(32)}{\Longrightarrow} y = \begin{pmatrix} a\, e^{\lambda t} + t\, b\, e^{\lambda t} \\ b\, e^{\lambda t} \end{pmatrix}$. Für $a = 0$ sind die Trajektorien durch $\lambda x = y\, ln\left(\frac{y}{b}\right)$ charakterisiert.

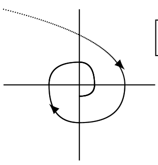


$\boxed{\text{Abb.IV}}$

$\lambda < 0$

Zeitumkehr für $\lambda > 0$.

- **Fall 3:** $A = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$. Faßt man die reellen Lösungen $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ als komplexe Zahlen $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$ auf, so erhält man das Fundamentalsystem $z_1(t) = e^{\alpha t} e^{-i\omega t}$, $z_2(t) = i\, z_1(t)$.



$\boxed{\text{Abb.V}}$

$\alpha < 0 \Rightarrow$ Spirale (Senke)

$\alpha > 0 \Rightarrow$ Spirale (Quelle) ist identisch mit Zeitumkehr bei $\alpha < 0$. Für einen Umlauf wird immer die gleiche Zeit benötigt.

$\alpha = 0 \Longrightarrow$ Kreis (Zentrum).

- Im Fall $D = 0$ hat A den EW 0 und man erhält $J_A = B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ durch eine affine Transformation. Für den zweiten EW gilt $\lambda = Spur(A)$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\, e^{Spur(A)\,t} \\ y_0 \end{pmatrix}$.

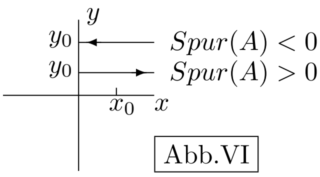
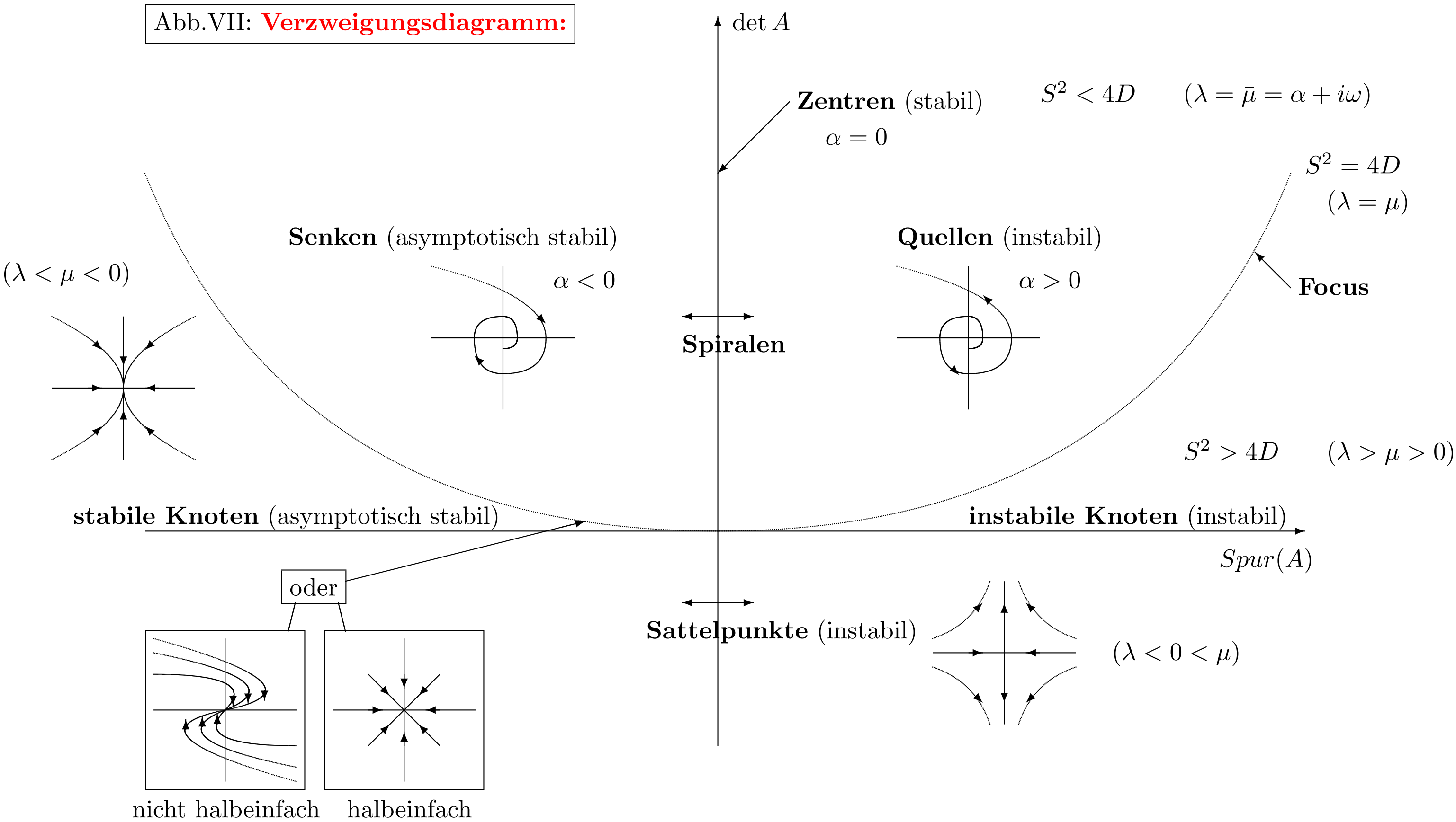


Abb.VI

Abb.VII: **Verzweigungsdiagramm:**



- Ein solches System tritt oft nach Linearisierung um einen GGW-Punkt x_g auf: $f(x) = \underbrace{f(x_g)}_{=0} + Df(x_g)(x - x_g) + REST$. Dann ist $Df(x_g) = A$, $x' = Ax$ und o.B.d.A. $x_g = 0$. Für die nach dem Einsetzen von x_g konstante Matrix A gilt das Verzweigungsdiagramm und Begriffe, wie Quelle, etc. werden dann auch dem GGW-Punkt zugeordnet:

Definition:

- x_g heißt Senke, wenn $Re\,\lambda < 0$, $\forall$ EW von A.
- x_g heißt Quelle, wenn $Re\,\lambda > 0$, $\forall$ EW von A.
- x_g heißt Zentrum, wenn alle EW von A rein imaginär sind.
- x_g heißt hyperbolisch, wenn die Realteile der EW von A immer ungleich Null sind.

- **Satz:** Falls x_g hyperbolisch ist, gilt $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. Hier ist der Fluß auf E kontraktiv, auf F aber expandierend.

- **Definition:** Die Nullösung $y(t) \equiv 0$ von $y' = Ay$ (oder auch die DGL selbst) im Intervall $J = [a, \infty)$ nennt man stabil, wenn alle Lösungen in J beschränkt sind, instabil, wenn es eine in J unbeschränkte Lösung gibt und asymptotisch stabil, wenn *jede* Lösung für $t \to \infty$ gegen $0 \in \mathbb{R}^2$ strebt.
- Man betrachtet hier die Nullösung, weil sie ein GGW-Punkt ist und definiert die Stabilität, indem man betrachtet, wie sich die Lösung bei kleinen Abweichungen von diesem GGW-Punkt verhält.

Insbesondere ist also eine asymptotisch stabile Lösung stabil.

- Klassifizierung der Stabilität durch die Eigenwerte: Die Nullösung

  a) ist asymptotisch stabil, wenn $Re\,\lambda < 0,\ \forall \lambda \in Spec(A)$ (dann also auch stabil),

  b) ist auch noch stabil, wenn rein imaginäre EW halbeinfach sind,

  c) ist instabil, sonst.

- **Lemma:** In jeder Umgebung einer Matrix A existiert eine Matrix $\tilde{A}$ mit paarweise verschiedenen Realteilen $Re\,\lambda$, $\lambda \in Spec(\tilde{A})$. Genauso existiert eine Matrix $\tilde{A}$ mit Realteilen $Re\,\lambda \neq 0$. Alle GGW-Punkte mit $Df(x_g) = \tilde{A}$ sind also hyperbolisch. Also liegen die hyperbolischen Systeme dicht in den linearen homogenen Systemen mit konstanten Koeffizienten. Sie sind generisch für die linearen Systeme (siehe auch Linearisierungssatz in Abschnitt 3.19).
- Man kann die Lösung von $x' = Ax$ über die EW von A enschränken:

Satz: Mit $\alpha < Re\,\lambda < \beta,\ \forall \lambda \in Spec(A)$, gilt $|x(0)|e^{\alpha t} < |x(t)| < |x(0)|e^{\beta t}$.

- Eine Lösung von $x' = Ax$ wächst bzw. fällt also höchstens exponentiell.

3.16 Matrizenfunktionen

- Wegen der Normäquivalenz ist die Konvergenz von Matrizenreihen unabhängig von der Norm. Die (absolute) Konvergenz ist äquivalent zur komponentenweisen (absoluten) Konvergenz.
- Es gilt:

  a) $e^{A+B} = e^A e^B$, für $[A, B] = 0$. $\Longrightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$

  b) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$

  c) $e^{diag(\lambda_1,..,\lambda_n)} = diag(e^{\lambda_1}, .., e^{\lambda_n})$

  d) $\det e^{tA} = e^{t\,Spur(A)}$

  e) $[A, B] = 0 \Longleftrightarrow [e^{tA}, e^{tB}] = 0 \Longleftrightarrow [e^{tA}, B] = 0$

- Wegen $(e^{At})' = A\,e^{At}$ ist $X(t) := e^{At}$ Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
- Ist N eine Matrix mit 1 auf der Nebendiagonalen und 0 sonst, so gilt

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \dots \\ & 1 & t & \dots & \dots \\ & & 1 & \dots & \dots \\ & & & \ddots & \dots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$e^{J_A} = e^{(\Lambda+N)t} = e^{\Lambda t}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & & \\ & e^{\lambda t} & & & \\ & & e^{\lambda t} & & \\ & & & e^{\lambda t} & \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix} e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\,e^{\lambda t} & \dots & \dots & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \dots \\ & & & \ddots & t\,e^{\lambda t}\dots \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

3.17 Floquet-Theorie

- Sei $A(t+\omega) = A(t)$ in der DGL $y' = A(t)y$.
- Mit $y(t)$ ist auch $y(t+\omega)$ eine Lösung[7]. Ist also $X(t)$ Fundamentalsystem, mit $X(0) = E$, so ist auch $X(t+\omega)$ Fundamentalsystem und es existiert ein *reguläre* Matrix C, so daß $X(t+\omega) = X(t)C$ (aus $t = 0$ folgt $C = X(\omega)$). Die EW λ_i von C heißen charakteristische Multiplikatoren und sind wegen $C \in \mathcal{G}l(n)$ ungleich Null. Also existieren charakteristische Exponenten μ_i mit $\lambda_i = e^{\omega\mu_i}$ (nur $Re\,\mu_i$ ist eindeutig).
- Ist $y(\omega) = \lambda y(0)$, so gilt auch $y(t + k\omega) = \lambda^k y(t)$ [8]. Da eine beliebige Lösung mit AW $y(0)$ als $y(t) = X(t)y(0)$ dargestellt werden kann, ist $y(\omega) = C\,y(0)$.
- Also gilt: $y(\omega) = \lambda\,y(0) \Longleftrightarrow C\,y(0) = \lambda\,y(0)$. Es gibt also ein Existenzsatz für 'periodische' Lösungen:
- **Satz:** Nicht-triviale Lösungen von $y' = A(t)y$ mit $y(t+\omega) = \lambda\,y(t)$ und AW $y(0)$ existieren genau dann, wenn λ EW von C zum EV $y(0)$ ist. Insbesondere gilt:

Nicht-triviale ω-periodische Lösungen existieren genau dann, wenn $\lambda = 1$ EW von $C = X(\omega)$ ist.
- **Satz:** Für alle regulären Matrizen C existiert eine Matrix B mit $C = e^{\omega B}$.
- **Satz von Floquet:**

Sei $X(\omega) = e^{\omega B}$. Das Fundamentalsystem $X(t)$ besitzt eine *Floquet-Darstellung*

$$X(t) = Q(t)e^{Bt} \qquad \text{, mit } \omega\text{-periodischer regulärer Matrix } Q(t) \tag{33}$$

- **Beweis:** Man definiere $Q(t) := X(t)e^{-Bt}$.
- **Hilfssatz:** Aus der Jordan-Normalform J_U von U erhält man die Jordan-Normalform von e^U, indem man die Diagonalelemente λ_i von J_U durch e^{λ_i} ersetzt.

[7] $y'(t+\omega) = A(t)y(t+\omega) = A(t+\omega)y(t+\omega) \Longleftrightarrow y'(\tilde{t}) = A(\tilde{t})y(\tilde{t})$

[8] Aus $y(\omega) = \lambda y(0)$ folgt $y(t+\omega) = \lambda y(t)$, weil beide Seiten den gleichen AW haben. Der Rest durch vollständige Induktion.

• Man erhält dadurch dieselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie dieselben EV.

• Sind also μ_i die EW von B, so sind $\lambda_i = e^{\omega \mu_i}$ die EW von $C = e^{\omega B}$. Die EW μ_i sind also die charakteristischen Exponenten.

• Multipliziert man eine reguläre Matrix D an (33), so ist $Z(t) := e^{Bt}D$ ein Fundamentalsystem von $z' = Bz$, mit AW D. Kennt man also B, so erhält man ein Fundamentalsystem $Y(t) := X(t)D = Q(t)Z(t)$ von $y' = A(t)y$.

• Hat man also die Matrix $C = X(\omega)$ und damit alle EW $\lambda = e^{\omega\mu}$ von C, mit algebraischer Vielfachheit k gegeben (also auch alle EW μ von B), so erhält man ein Fundamentalsystem, dessen Lösungen zwingend von der Form $y(t) = q_{k-1}(t)e^{\mu t}$ sind. Dabei ist $q_{k-1}(t)$ ein Polynom in t vom Grad $\leq k-1$ mit t-abhängigen ω-periodischen Koeffizienten.

3.18 Lineare DGL's n-ter Ordnung

• Eine DGL der Form

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + ... + a_0(t)\,u = b(t) \tag{34}$$

ist äquivalent zu dem linearen System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= b(t) - a_0\,y_1 - ... - a_{n-1}\,y_n \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow y' = A(t)y + b(t)$, mit $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ und Koeffizientenmatrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

• Also gilt: Das AW-Problem ($\tau \in J$) der DGL (34) hat eine eindeutige Lösung, wenn die Koeffizienten stetig sind. Sie existiert auf ganz J und hängt auf jedem Kompaktum von J stetig von den Koeffizienten ab.

- Im übrigen gelten natürlich alle Aussagen über lineare Systeme der Form $y' = A(t)y + b(t)$ auch bei (34).
- Sind z.B. die Koeffizienten a_i der DGL

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, u^{(i)}(t) = 0 \tag{35}$$

konstant und o.B.d.A. $a_n = 1$, liegt also ein homogenes System mit konstanten Koeffizienten vor (mit Lösungen aus $\mathbb{R}^n$), so ist (35) prinzipiell natürlich über das Jordan-Kalkül lösbar. Allerdings hat das System (35) eine sehr spezielle Form. Es ist einfacher zu lösen, denn es gilt der

- **Satz:** Sei λ eine k-fache Nullstelle der konstanten Koeffizientenmatrix von (35).

Dann sind die Lösungen $u_{\lambda,q}(t) = t^q \, e^{\lambda t}$, $(0 \leq q \leq k-1)$, linear unabhängig. Aus den n Nullstellen von $P(\lambda)$ erhält man so ein (i.A. komplexes) Fundamentalsystem. Ein reelles Fundamentalsystem erhält man, indem man zu einer komplexen Nullstelle $\lambda = \mu + i\nu$ k-ter Ordnung die k komplexen Lösungen in Realteil $t^q \, e^{\mu t} \cos \nu t$ und Imaginärteil $t^q \, e^{\mu t} \sin \nu t$ aufspaltet (und die k Nullstellen $\bar{\lambda}$ wegfallen läßt).

- **Beispiel: Differentialgleichung der gedämpften Schwingung** $u'' + 2a\, u' + b\, u = 0$ $(\star)$**.**

Sie ist äquivalent zu $\left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -2a\, y - b\, x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x = u)$.

$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -2a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \Longrightarrow \lambda = -a + \sqrt{a^2 - b}$, $\mu = -a - \sqrt{a^2 - b}$. Nun gibt es 3 Fälle, für die man sofort linear unabhängige Lösungen angeben kann:

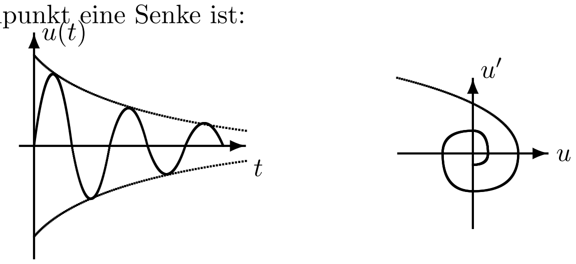
a) $a^2 > b \Longrightarrow \lambda \neq \mu\,;\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow\ u_1 = e^{\lambda t}\ ,\ u_2 = e^{\mu t}$

b) $a^2 = b \Longrightarrow \lambda = \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow\ u_1 = e^{\lambda t}\ ,\ u_2 = t\, e^{\lambda t}$

c) $a^2 < b \Longrightarrow \lambda = \bar{\mu} = -a + i\, s \in \mathbb{C} \Longrightarrow\ u_1 = e^{-at} \cos st\ ,\ u_2 = e^{-at} \sin st$

- Die DGL $(\star)$ kann man natürlich auch als ebenes System auffassen. Ist $a, b > 0$, so erhält man z.B. für den Fall c), daß der Nullpunkt eine Senke ist:

Abb.VIII



Zsgh. zwischen der Funktion u(t) und der Phasenraum-Trajektorie.

- Die DGL der erzwungenen Schwingung $u'' + 2a\, u' + b\, u = c \cos \alpha t$ wird gelöst über den komplexen Ansatz $u(t) = A\, e^{i\alpha\, t}$ in der komplexifizierten DGL $u'' + 2a\, u' + b\, u = c\, e^{i\alpha t}$. Die ursprüngliche DGL wird dann gelöst durch $Re\, u(t)$.
- Eulersche DGL: $a_n t^n x^{(n)} + \ldots + a_0 t^0 x^{(0)} = 0$ (Die Substitution $t \longmapsto e^t$ führt auf ein System mit konstanten Koeffizienten, welches geschlossen lösbar ist.)

3.19 Lyapunov-Stabilität

- Beispiele für Stabilität bzw. Instabilität bei unendlichen Intervallen:

Sind $y(t)$, $z(t)$ Lösungen von $y' = y$ $[y' = -y]$ mit AW $\eta, \eta + \epsilon$, so gilt $z(t) - y(t) = \epsilon e^t \to \infty$ $(t \to \infty)$ $[z(t) - y(t) = \epsilon e^{-t} \to 0$ $(t \to \infty)]$.

- **Definition:** Sei $x(t)$ eine Lösung von $y' = f(t, y)$, $y, f \in \mathbb{C}^n$ und mindestens in $[0, \infty)$ erklärt.

Dann heißt $x(t)$ stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn folgendes gilt: $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: für alle Lösungen $y(t)$ mit $|y(0) - x(0)| < \delta$ gilt $|y(t) - x(t)| < \epsilon$, $t \in [0, \infty)$. (Die gestörte Lösung $y(t)$ bleibt in einem ϵ-Schlauch um $x(t)$. Zu jedem ϵ gibt es i.A. ein anderes δ.)

$x(t)$ heißt asymptotisch stabil, wenn $x(t)$ stabil ist und falls ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle Lösungen mit $|y(0) - x(0)| < \delta$ gilt $\lim\limits_{t \to \infty} |y(t) - x(t)| = 0$. (Die gestörte Lösung $y(t)$ konvergiert gegen $x(t)$. Hier ist es ein δ, für alle ϵ)

Eine Lösung heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

- Die Stabilitätsdefinitionen für die Nullösung des homogenen linearen Systems stimmen mit obigen Definitionen überein.

- In diesen Definitionen ist $t = 0$ ausgezeichnet, es gilt aber der

- **Satz:** Ist f zusätzlich lipschitz-stetig bzgl. y, so ist die in $[0, \infty)$ existierende Lösung $x(t)$ genau dann stabil bzgl. $t = 0$, wenn sie bzgl. einer beliebigen Stelle $a > 0$ stabil ist.

- Sei nun $y' = A(t)y + b(t)$ ein lineares System und A, b stetig in $J = [0, \infty)$ (jede Lösung existiert dann in ganz J). Sei $X(t)$ Fundamentalsystem mit $X(0) = E$.

- Betrachtet man die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung, so folgt - weil in der Definition der Stabilität nur *diese* Differenz auftaucht - sofort der

- **Satz:** Ist die Nullösung der homogenen Gleichung stabil (bzw. instabil oder asymptotisch stabil), so hat *jede* Lösung der *inhomogenen* Gleichung diesselbe Eigenschaft.

- In qualitativen Stabilitätsfragen kann man sich bei linearen Systemen also auf die Untersuchung der Nullösung der homogenen Systeme beschränken.

- Die Klassifizierung der Stabilität durch die EW der konstanten Matrix A aus $y' = Ay$ im Abschnitt 3.15 gilt auch in n Dimensionen. Eine äquivalente Formulierung ist:

- **Klassifizierung der Stabilität:** Sei $\gamma := max\{Re\,\lambda\ ,\ \lambda \in Spec(A)\}$. Die Lösung $x(t) \equiv 0$ ist im Fall

  $\gamma < 0$ asymptotisch stabil

  $\gamma > 0$ instabil

  $\gamma = 0$ nicht asymptotisch stabil, aber stabil genau dann, wenn alle rein imaginären EW halbeinfach sind.

- Damit ist das qualitative Stabilitätsverhalten für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten vollständig geklärt.

- **Abschätzungssatz** für $X(t) = e^{At}$: Genügen alle EW $\lambda \in Spec(A)$ der Relation $\alpha < Re\,\lambda < \beta$, so gilt (in einer geeigneten Norm) $e^{\beta t} \leq \|e^{At}\| \leq e^{\alpha t}$, $t \geq 0$.

- **Stabilitätssatz** für $y' = Ay + g(t, y)$:

Sei $g(t, z)$ für $t \geq 0$, $|z| < \alpha$ $(\alpha > 0)$, erklärt und stetig mit $\lim\limits_{|z| \to 0} \frac{|g(t,z)|}{|z|} = 0$ $\Big($ gleichmäßig für $t \in [0, \infty)$,

d.h. $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall n > N\,, \forall t \in [0, \infty) \left| \frac{|g(t,z_n)|}{|z_n|} - 0 \right| < \epsilon$. Deshalb gilt insbesondere $g(t, 0) = 0$ $\Big)$.
Sei nun A konstant mit $Re\,\lambda < 0$, $\forall\, \lambda \in Spec(A)$.

Dann ist die Nullösung von $y' = Ay + g(t, y)$ asymptotisch stabil.

Gilt stattdessen $Re\,\lambda > 0$, für irgendeinen EW von A, so ist die Nullösung von $y' = Ay + g(t, y)$ instabil.

- Ist also $g(t, y)$ klein gegenüber y (im Sinne des obigen Grenzwerts), so überträgt sich das Stabilitätsverhalten der homogenen Gleichung $y' = Ay$ auch auf die DGL $y' = Ay + g(t, y)$.
- Die Linearisierung des autonomen Systems $y' = f(y)$, mit $f(0) = 0$, ergibt im ersten Schritt $y' = Ay + g(y)$. Mit $A = Df(0)$ erhält man direkt $\lim\limits_{|y|\to 0} \frac{|g(y)|}{|y|} = 0$. Nach obigem Stabilitätssatz ist die "Ruhelage" $x \equiv 0$ also asymptotisch stabil, wenn dasselbe für die homogene Gleichung $y' = Ay$ gilt. Dies ist etwa der Fall für $Re\,\lambda < 0$, $\forall \lambda \in Spec(A)$.
- **Definition:** Ein kritischer Punkt a von f heißt hyperbolisch, wenn für alle EW λ von $A = f'(a)$ gilt: $Re\,\lambda \neq 0$.
- **Linearisierungssatz von Grobman-Hartman:** Sei a hyperbolischer kritischer Punkt von $f \in C^1(D)$, dann existieren Umgebungen $U(a), V(a)$ und ein Homöomorphismus $h : U \longrightarrow V$, der die Trajektorien von $y' = Ay$ (soweit sie in U liegen) in die Trajektorien der i.A. nicht-linearen Gleichung $y' = f(y)$ unter Erhaltung des Richtungssinnes überführt.
- Die Zwei-dimensionalen reellen Systeme $y' = Ay$ mit $\det A \neq 0$ haben den Nullpunkt als einzigen kritischen Punkt. Er ist in allen Fällen mit Ausnahme des Zentrums $(K(0, \omega))$ hyperbolisch.

Ay ist aus $C^1(D)$. Nach dem Linearisierungssatz sind die hyperbolischen Systeme ($y' = Ay = f'(a)y$, mit a hyperbolischem kritischen Punkt von f) also in gewisser Weise generisch für die homogenen linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten im Fall $n = 2$.

- **Beispiele:**

  a) Für den kritischen Punkt $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (von f !) des mathematischen Pendels ($\ddot{\phi} + \sin\phi = 0$) ist die Linearisierung $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und man erhält den harmonischen Oszillator $\ddot{\phi} + \phi = 0$. Die Trajektorien sind Kreise um x_1. Wegen $Re\,\lambda = 0$ ist x_1 aber nicht hyperbolisch und der Linearisierungssatz macht keine Aussage.
  Für den kritischen Punkt $x_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Linearisierung aber $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\lambda = \pm 1$. Es liegt ein Sattelpunkt vor und nach dem Linearisierungssatz hat das Phasenportrait des mathematischen Pendels in einer Umgebung von x_2 ebenfalls Sattelpunktstruktur.

  b) (siehe Abb. X) Für $y' = \alpha y + \beta y^3$ $(n = 1)$ lautet die linearisierte Gleichung $y' = \alpha y$. Das Stabilitätsverhalten von $y \equiv 0$ ist also: Für den Fall $\alpha = 0$ ist der Linearisierungssatz nicht anwendbar und die linearisierte Gleichung liefert keine qualitativ ähnliche Lösung von $y' = \beta y^3$. Durch Separation der Variablen erhält man $y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{-2\beta(t+C)}} \longrightarrow \begin{cases} 0\,,\ \beta < 0 \ \ (t \to \infty) \\ 0\,,\ \beta > 0 \ \ (t \to \infty) \end{cases}$

- Man betrachtet nun reelle autonome Systeme $y' = f(y)$ mit stetiger Funktion f auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, welche die 0 enthält. Sei $f(0) = 0$ (alle Sätze sind leicht auf $x(t) = a,\ f(a) = 0$, übertragbar. Deshalb wird im Folgenden auch nur die Stabilität der *Nullösung* behandelt.)

	lineare Gleichung	nicht lineare Gleichung
$\alpha < 0$	asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
$\alpha > 0$	instabil	instabil

Abb.X zu Bsp. b)

- **Definition:** Die Nulllösung $x(t) \equiv 0$ heißt auch Ruhelage oder GGW-Lage.
- Ist f in D lipschitz-stetig, so ist die Lösung des AW-Problems $y' = f(y)$, $y(0) = \eta$ eindeutig bestimmt.
- **Definition:** Die Ruhelage heißt exponentiell stabil, falls (für die auf $[0, \infty)$ existierenden Lösungen) mit geeigneten Konstanten β, c, γ aus $|y(0)| < \beta$ die Ungleichung $|y(t)| < c\,e^{-\gamma t}$ folgt.
- Ist f lokal lipschitz-stetig, so folgt aus der exponentiellen Stabilität die asymptotische Stabilität.
- Für die reellwertige Funktion $V \in C^1(D)$ definiert man die Richtungsableitung von V in der (nicht normierten) Richtung von f durch $\dot{V}(x) := \langle grad\, V(x),\ f(x)\rangle \equiv \lim\limits_{t\to 0} \frac{V(x+t\,f(x))-V(x)}{t}$.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(y(t)) &= \left.\frac{dV}{dt}\right|_{y(t)} = \left.\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\right)\right|_{y(t)} \\ &= \langle grad\, V, f\rangle|_{y(t)} = \langle grad\, V(y(t)), f(y(t))\rangle \\ &= \dot{V}(y(t)) \end{aligned}$$

- Deshalb wird $\dot{V}$ auch als Ableitung von V längs Trajektorien bezeichnet.
- **Definition:** Eine Lyapunov-Funktion für die autonome DGL $y' = f(y)$ ist eine Funktion $V \in C^1(D)$ mit den Eigenschaften

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0,\ x \neq 0$$

$$\dot{V}(x) \leq 0,\ x \in D$$

Sie heißt strikt, wenn $\dot{V}(x) < 0,\ x \in D$. Dabei ist das Argument von V natürlich eine Lösung der DGL. Über die Lösung x ist die Beziehung zwischen V und der DGL erklärt. Insbesondere gilt $\dot{V}(x) = \langle grad\, V(x), f(x)\rangle$.

- **Stabilitätssatz von Lyapunov:** Existiert eine Lyapunov-Funktion V zur stetigen Funktion f, so gilt für die Nullösung $x(t) \equiv 0$ von $y' = f(y)$:

  a) $\dot{V} \leq 0$, in $D \Longrightarrow x(t)$ ist stabil (existiert also überhaupt eine Lyapunov-Funktion zu f, so ist $x(t) \equiv 0$ zumindest stabil)

  b) $\dot{V} < 0$, in $D \setminus \{0\} \Longrightarrow x(t)$ ist asymptotisch stabil (existiert sogar eine strikte Lyapunov-Funktion, so ist $x(t)$ asymptotisch stabil)

  c) $\dot{V} \leq -\alpha V$ und $V(x) \geq b|x|^\beta \Longrightarrow x(t)$ ist exponentiell stabil

- Mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion zu f und deren Ableitung kann man also ohne die Kenntnis der Lösungen schon auf die Stabilität der Nullösung schließen.
- **Instabilitätssatz von Lyapunov:** Sei $V \in C^1(D)$, $V(0) = 0$ und $V(x_k) > 0$, für eine Nullfolge (x_k) aus D. Die Nullösung ist dann instabil, falls:

$$\dot{V}(x) > 0 \quad , \; x \neq 0$$

- Man kennt kein allgemeines Kalkül zur Konstruktion von Lyapunov-Funktionen. Oft kommt man aber mit einem Innenprodukt $V(x) = (x, x) = |x|^2$ zum Ziel.
- Anwendungen zum Stabilitätssatz von Lyapunov:

  - **Gradientensysteme:** $x' = -grad(g(x))$, mit $g \in C^1(D)$.
    Hier kann man $V(x) := g(x)$ als Lyapunov-Funktion nehmen, wenn zusätzlich gilt: $V(a) = 0, V(x) > 0$, $x \neq a$.
    Es gilt dann $\dot{V}(x) = \langle grad(g(x)), \dot{x} \rangle = -|grad(g(x))|^2$.
    Hat also g z.B. an der Stelle $a \in D$ ein lokales Minimum (also $f(a) = -grad(g(x))_{|x=a} = 0$) und existiert eine Umgebung von a, in der $grad(g(x)) \neq 0$, für $x \neq a$, so ist die GGW-Lage $x(t) \equiv a$ asymptotisch stabil.
  - **Bewegung im konservativen Kraftfeld:**
    $x'' = -grad(U(x)) \Longleftrightarrow x' = y\,,\; y' = -grad(U(x))$ (also ein System mit $2n$ Gleichungen).
    Als Lyapunov-Funktion wird die Energiefunktion $V(x, y) = U(x) + \frac{1}{2}\langle y, y \rangle$ verwendet (auch hier muß zusätzlich $U(x) > 0$, für $x \neq 0$ und $U(0) = 0$ angenommen werden). Es gilt $\dot{V}(x, y) \equiv 0$. Die Funktion V bleibt also entlang Phasenraum-Trajektorien von Lösungen konstant (Energie-Erhaltungssatz).
  - **Hamiltonsysteme:**
    Definition: Sei $H(x, y) \,:\, D = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ aus $C^2(D)$. Dann heißt ein autonomes System der $2n$ DGL's

$$x' = \partial_y H(x, y)\,,\; y' = -\partial_x H(x, y)$$

    Hamiltonsches System. Die Funktion H wird dann Hamilton-Funktion genannt.
    Man kann H als Lyapunov-Funktion verwenden (wenn zusätzlich: $H(0, 0) = 0, H(x, y) > 0, (x, y) \neq (0, 0)$), denn es gilt

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \left\langle grad_{(x,y)}(H), (\dot{x}, \dot{y}) \right\rangle = \langle grad_x(H), \dot{x} \rangle + \langle grad_y(H), \dot{y} \rangle = \langle -\dot{y}, \dot{x} \rangle + \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle \equiv 0$$

    Also gilt: Ein strenges Minimum der Hamilton-Funktion ist eine stabile Ruhelage.

- Ist f lokal lipschitz-stetig, so existiert die Lösung mit $y(0) = \eta$ in einem maximalen Intervall $J = (t^-, t^+)$, $-\infty \leq t^- < 0 < t^+ \leq \infty$.
- $\gamma^+ := y([0, t^+)) := \{y \,|\, y = y(t)\,,\; t \in [0, t^+)\}$ heißt positive Halbtrajektorie.
- Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt positiver Limespunkt (oder ω-Limespunkt), wenn $t^+ = \infty$ und wenn eine gegen ∞ strebende Folge (t_k) existiert mit $\lim\limits_{k \to \infty} y(t_k) = a$. (Man benötigt hier den Begriff der Folge, da

ein Limes $t \to \infty$ eindeutig wäre, man aber z.B. auch einen periodischen Grenzzyklus zulassen will.)

- Die Menge L^+ aller ω-Limespunkte heißt ω-Limesmenge. Ist eine Lösung periodisch, etwa $\sin t$, so gilt $L^+ = L^- = [-1, 1]$.
- Für periodische Lösungen gilt immer $\gamma = \gamma^+ = \gamma^- = L^+ = L^-$.
- Die Bezeichnungen für $t^- = -\infty$ sind α-Limespunkt und α-Limesmenge.
- Um die Abhängigkeit vom AW $y(0) = \eta$ zu kennzeichnen, schreibt man $t^+(\eta)$, $\gamma^+(\eta)$, $L^+(\eta)$, ...
- Für $A \subset D$ ist $L^+(A) := \bigcup\limits_{a \in A} L^+(a)$.
- Mit $y(t)$ ist auch $y(t_0 + t)$ Lösung mit derselben Limesmenge $\Longrightarrow L^+(\eta) = L^+(\gamma(\eta))$.
- Eine Menge $M \subset D$ heißt invariant (positiv invariant, negativ invariant) bzgl. der DGL $y' = f(y)$, wenn aus $\eta \in M$ auch $\gamma(\eta) \in M$ $(\gamma^+(\eta) \in M, \gamma^-(\eta) \in M)$ folgt.
- Die folgenden Aussagen gelten auch für (negative) Invarianz.
- Die Vereinigung positiv invarianter Mengen ist natürlich wieder positiv invariant.
- Wegen der Eindeutigkeit ist jede positive Halbtrajektorie positiv invariant und jede Trajektorie invariant.
- Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen gilt: Ist $y(t)$ Lösung mit maximalem Existenzintervall J und sind $0, s, s + t \in J$, so gilt $y(s + t) = y(t, y(s))$. (Die Bezeichnung $y(t; y(s))$ bedeutet die Lösung $y(t)$ mit AW $y(0) = y(s)$.)
- Für eine Lösung $y(t)$ mit $t^+ = \infty$ gilt: $\gamma^+ \cap L^+ \neq \emptyset \Longrightarrow \gamma^+ \subset L^+$:

Sei $a \in \gamma^+ \cap L^+$, also $a = y(\tau)$, für ein $\tau \geq 0$ und $a = \lim\limits_{k \to \infty} y(t_k)$. Sei zudem (t_k) so gewählt, daß $\forall\, k \in \mathbb{N}\ t_k \geq \tau$ (was wegen $(t_k) \to \infty$ immer möglich ist).
Dann gilt für jedes $t \geq -\tau$: $y(t_k + t) = y(t, y(t_k)) \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} y(t, a) = y(t, y(\tau)) = y(\tau + t)$. Natürlich ist $\gamma^+ = \{y(\tau + t) \mid t \geq -\tau\}$, aber $y(\tau + t)$ ist wegen des letzten Grenzwertprozeßes auch ω-Limespunkt, $\forall\, t \geq -\tau$. Damit gilt $\gamma^+ \subset L^+$.

- Ist $M \subset D$ positiv invariant, so gilt $M = \bigcup\{\gamma^+(\eta) \mid \eta \in M\}$.
- **Satz:** Sei $K \subset D$ kompakt und $y(t)$ Lösung von $y' = f(y)$ mit $\gamma^+ \subset K$.

Dann gilt $t^+ = \infty$, $L^+ \subset K$ nichtleer, kompakt, zusammenhängend und invariant.
Außerdem gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} dist(y(t), L^+) = 0$. Die Bahn konvergiert also an jeder Stelle des Grenzzyklus gegen diesen, nicht nur an einzelnen Punkten (γ heißt Grenzzyklus, falls γ periodisch und regulär ist und falls ein $x_0 \notin \gamma$ existiert mit $x(t, x_0) \to \gamma\ (t \to \infty)$).

- Insbesondere existiert jede Lösung $y(t, \eta)$ mit $\eta \in L^+$ auf ganz $\mathbb{R}$ (also ist auch $t^- = -\infty$) und wegen der Invarianz von L^+ bleibt y auch in L^+.
- Sei $x(t) \equiv 0$ asymptotisch stabil, dann folgt aus der Definition der asymptotischen Stabilität sofort, daß die Menge aller $\eta \in D$, für welche die Lösungen $y(t, \eta) \to 0$ strebt, eine Nullumgebung $\mathcal{E}(0)$ ist. Diese Menge heißt Einzugsbereich von 0. Insbesondere ist $0 \in \mathbb{R}^n$ eine positiv invariante Menge.
- **Definition:** Allgemeiner heißt $\mathcal{E}(M)$ Einzugsbereich von M für eine positiv invariante Menge $M \subset D$, falls $\mathcal{E}(M) = \{\eta \in D \mid dist(y(t, \eta), M) \to 0\ (t \to \infty)\}$.
- **Definition:** Ist $M \subset \mathcal{E}(M)$, so heißt M Attraktor.
- **Definition:** Ist $D = \mathcal{E}(M) = \mathbb{R}^n$, so heißt M globaler Attraktor.
- Eine einpunktige Menge $M = \{a\}$ mit $f(a) = 0$ ist ein Attraktor, wenn die Lösung $x(t) \equiv a$ asympto-

tisch stabil ist, denn es gilt:

$\{a\}$ ist Attraktor, wenn $\mathcal{E}(a) \supset \{a\}$, mit $\mathcal{E}(a) = \{\eta \in D \mid dist(y(t,\eta), a) \to 0 \ \ (t \to \infty)\}$. Nun sei $x(t) \equiv a$ asymptotisch stabil, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle Lösungen $y(t)$ mit $|y(0) - a| < \delta$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} |y(t) - a| = 0 \Longrightarrow \mathcal{E}(a) = B_\delta(a) \supset \{a\}$.

• **Attraktor der Van-der-Pol-Gleichung:** Weil in der (linearen) Pendelgleichung $x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = 0$ mit Dämpfungsterm sowohl die Reskalierung einer Lösung $x(t)$ auf die Lösung $\varrho x(t)$ (also beliebige Amplitude und Geschwindigkeit) als auch negatives δ (beliebige Energiezufuhr) physikalisch nicht sinnvoll sind, geht man zur (nichtlinearen) Van-der-Polschen DGL über:

$$x'' + \epsilon(1 - x^2)x' + \omega^2 x = 0$$

Der Attraktor ist eine geschlossene (also periodische) Bahn, auf die sowohl Lösungen von Außen als auch von Innen exponentiell zulaufen.

3.20 Der Satz von Poincaré-Bendixson

• Gegeben sei ein autonomes System $\dot{x} = f(x)$ mit dem Fluß $\phi(t, x)$ $(\star)$.

• **Definition:** Ein endliches abgeschlossenes Segment T einer Geraden (wobei T ganz im Phasenraum E enthalten ist) heißt Transversale von $(\star)$, falls es keine kritischen Punkte von $(\star)$ auf T gibt und falls das Vektorfeld $f(x)$ in keinem Punkt von T tangential zu T ist.

• Wenn die Tangentialvektoren zur Transversalen T linear unabhängig von $f(x)$ sind, dann liegen auf T natürlich keine kritischen Punkte.

• Jeder reguläre Punkt $x_0 \in E$ ist innerer Punkt einer Transversalen T.

• Jede Trajektorie, welche die Transversale T in x_0 trifft, muß T auch überqueren (Deshalb die Forderung $f \in C^1(E)$ im Satz von Poincaré-Bendixson).

• **Satz von Poincaré-Bendixson:**

Sei $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $\dot{x} = f(x)$. Sei γ Trajektorie des AWP, wobei γ^+ in einem Kompaktum enthalten sei.

Falls dann $L^+(\gamma)$ keine kritischen Punkte enthält, ist $L^+(\gamma)$ ein periodischer Orbit.

• **Anwendungen:**

1) Für einzelne Trajektorien: Zu einem Punkt x_0 muß man ein Kompaktum finden, in dem $\gamma^+(x_0)$ verläuft. Liegt in $L^+(\gamma)$ dann kein kritischer Punkt, so ist $L^+(\gamma)$ ein periodischer Orbit.

2) Für Kompakta des Phasenraums E: Wählt man ein *positiv invariantes* Kompaktum $K \subset E$, so muß man nur noch sicherstellen, daß $L^+(\gamma)$ keinen kritischen Punkt enthält.

Ist der kritische Punkt eine Quelle, so kann man einfach eine offene Kreisscheibe um diesen Punkt herausschneiden. K bleibt dann kompakt und $L^+(\gamma)$ bleibt in K.

• **Beweis:**

Lemma 1:

> Ist x_0 innerer Punkt von T, dann existiert $\forall\, \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß jede Trajektorie, die bei $t = 0$ in $B_\delta(x_0)$ liegt, die Transversale zu einer Zeit $|t| < \epsilon$ überquert.

Lemma 2:

> (Beweis über Jordankurve.) Ein endliches Teilstück einer Trajektorie γ überquert eine Transversale nur in endlich vielen Punkten.
> Falls γ ein periodischer Orbit ist, überquert er T in genau einem Punkt.
> $L^+(\gamma)$ überquert T nur in einem Punkt.

Trifft eine Trajektorie in unendlich vielen Punkten auf die (beschränkte) Transversale, so existiert ein Häufungspunkt von Schnittpunkten, welcher auf der (abgeschlossenen) Transversale liegt. Also existiert eine Folge (t_n), so daß $\phi(t_n, \cdot)$ immer wieder durch diesen Häufungspunkt läuft, d.h. es existiert ein periodischer Orbit.

Lemma 3:

> Falls $\gamma \cap L^+(\gamma) \neq \emptyset$, dann ist γ entweder ein kritischer Punkt oder ein periodischer Orbit.

Wenn also ein ω-Limespunkt $x_0 \in \gamma$ kein kritischer Punkt ist, dann muß sich der Fluß von x_0 entfernen. Da aber x_0 ein ω-Limespunkt ist, muß der Fluß wieder zu x_0 zurück.

Lemma 4:

> Falls $L^+(\gamma)$ keine kritischen Punkte enthält, aber einen periodischen Orbit γ_0, dann gilt sogar $L^+(\gamma) \equiv \gamma_0$.

Eigentlicher Beweis:
Sei nun γ^+ in einem Kompaktum K und in $L^+(\gamma)$ seien keine kritischen Punkte.
(Ist γ periodisch, so liegt γ natürlich in $L^+(\gamma)$. Nach Lemma 4 ist $L^+(\gamma)$ also ein periodischer Orbit.)
Im allgemeinen ist γ kein periodischer Orbit. Da γ^+ nach Voraussetzung aber in einem Kompaktum verläuft, ist $L^+(\gamma)$ nichtleer, kompakt, zusammenhängend und invariant.
Nun wird ein periodischer Orbit konstruiert, der seine eigene ω-Limesmenge ist:
Sei Γ ein Orbit in $L^+(\gamma)$. Ein solcher Orbit existiert, da

1. $L^+(\gamma) \subset K \subset E$
2. $L^+(\gamma)$ ist nichtleer
3. $L^+(\gamma)$ ist invariant

Da $L^+(\gamma)$ beschränkt, abgeschlossen und zusammenhängend ist, besitzt Γ einen HP $y \in L^+(\gamma)$. Da y *HP* von Γ ist, gilt natürlich auch $y \in L^+(\Gamma)$
Sei T eine Transversale durch y. Nach Lemma 2 ist y der einzige Schnittpunkt von T und $L^+(\gamma)$: $y = T \cap L^+(\Gamma)$.
Da Γ als Orbit abgeschlossen ist, liegt y aber auch in Γ: $y \in T \cap \Gamma$. $\Longrightarrow (T \cap L^+(\Gamma)) \subset (T \cap \Gamma)$ Also haben Γ und $L^+(\Gamma)$ einen Punkt gemeinsam. Nach Lemma 3 ist Γ also periodisch, weil $\Gamma \subset L^+(\gamma)$ keine kritischen Punkte enthält. Nach Lemma 4 gilt jetzt $L^+(\gamma) = \Gamma$. Die ω-Limesmenge $L^+(\gamma)$ der Trajektorie γ ist also ein periodischer Orbit.

- **Satz von Poincaré-Bendixson für Ringgebiete:** Sei $0 < \alpha(\theta) < \beta(\theta)$, mit 2π-periodischen, glatten Funktionen α, β, und $R := \{r \mid \alpha(\theta) \leq r \leq \beta(\theta)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Gilt für das autonome System $x' = f(x)$

(i) Der Fluß bleibt in R $\left(\begin{cases} \langle f(x), x\rangle \leq 0 & , \text{ auf } \beta \\ \langle f(x), x\rangle \geq 0 & , \text{ auf } \alpha \end{cases}\right)$

(ii) f zeigt immer in mathematisch positivem Sinn auf R $\left(\langle f(x), x^{\perp}\rangle > 0 \, , \; x^{\perp} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right)$,

dann existiert eine periodische Bahn in R.

- **Beweis** über Polarkoordinaten.
- **Die Poincaré-Abbildung:**

Sei γ ein ω-periodischer Orbit und $x_0 \in \gamma$ beliebig. Sei V transversaler Schnitt durch x_0. Es existiert dann eine Kugel $U(x_0)$ und eine eindeutige Funktion $\tau \in C^1(U, \mathbb{R})$, mit $\tau(x_0) = \omega$, so daß $\tau(x) \cdot x \in V$, $\forall x \in U$. Sei $W := V \cap U$, dann wird durch $\pi \in C^1(W, V)$, $\pi(x) := \tau(x) \cdot x$, $\forall\, x \in W$ die Poincaré-Abbildung (bzgl. V) definiert.

Dabei ist $\tau(x)$ der Zeitpunkt der ersten Rückkehr von $x \in W \subset V$ nach V, und $\pi(x)$ ist der Punkt, in dem $\gamma^+(x)$ den Schnitt V zum ersten Mal wiedertrifft. d.h. x_0 ist ein Fixpunkt der Poincaré-Abbildung. Alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 werden nach dem ersten Umlauf näher an den Punkt x_0 herangeführt. Dies impliziert die asymptotische Stabilität des Orbits γ.

Sei H die (eindeutig bestimmte) Hyperebene durch x_0 mit $V \subset H$. Dann ist $W_0 := W - x_0$ offene Nullumgebung in H und die Abbildung

$$\pi_0 : W_0 \longrightarrow H \; , \; x \longmapsto \pi(x + x_0) - x_0$$

ist ein C^1-Diffeomorphismus von W_0 auf eine Nullumgebung von H.